Kinematics of Fluid

Sucharit Koontanakulvong

ทที่ 8 จลศาสตร์ของของไหล
(Kinematic)

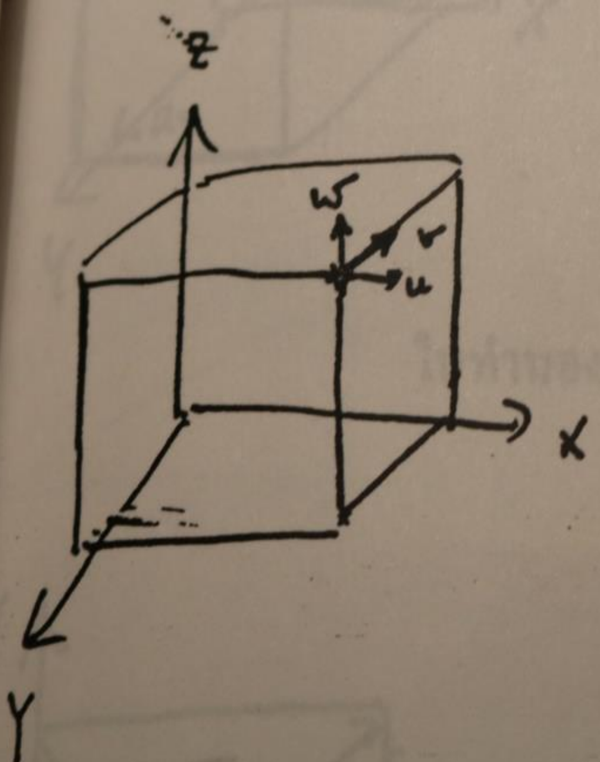
บทนี้จะกล่าวถึงวิธีการอธิบายการเคลื่อนที่ของของ
หล การกำหนดทฤษฎีเส้นแนวการไหล ฟังก์ชันของการไหล
ละศักย์ความเร็ว ตาข่ายการไหล และการประยุกต์ใช้

นื้อหา

1. การอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล
2. เส้นแนวการไหล
3. ฟังก์ชันของการไหล
4. ฟังก์ชันของศักย์ความเร็ว
5. ตาข่ายการไหล

1. การอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล

วิธีของออยเลอร์ จะอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหล โดยเทียบกับจุดใดจุดหนึ่งที่คงที่ โดยกำหนดพิกัด (X , Y , Z) เป็นแกนพิจารณา



จะได้ค่าความเร็วเป็นฟังก์ชันของแกน X , Y , Z และ t (เวลา)
หรือเขียนเป็น

$$V = f(X, Y, Z, t)$$

ซึ่งถ้าพิจารณาในแต่ละแกน จะได้

$$u = \Phi_1(X, Y, Z, t)$$

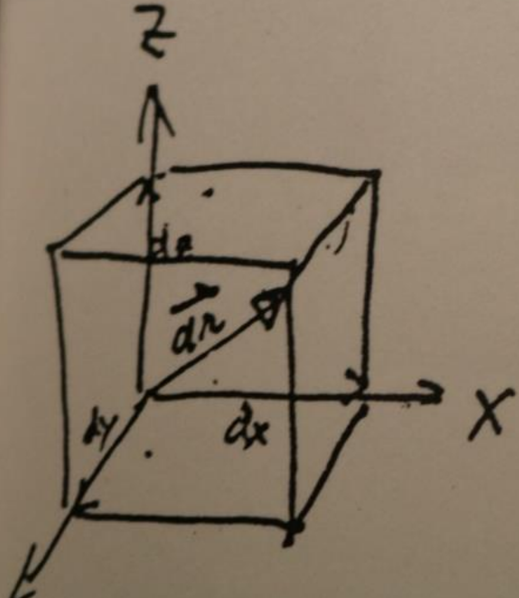
$$v = \Phi_2(X, Y, Z, t)$$

$$w = \Phi_3(X, Y, Z, t)$$

$$v = \Phi_2(X, Y, Z, t)$$
$$w = \Phi_3(X, Y, Z, t)$$

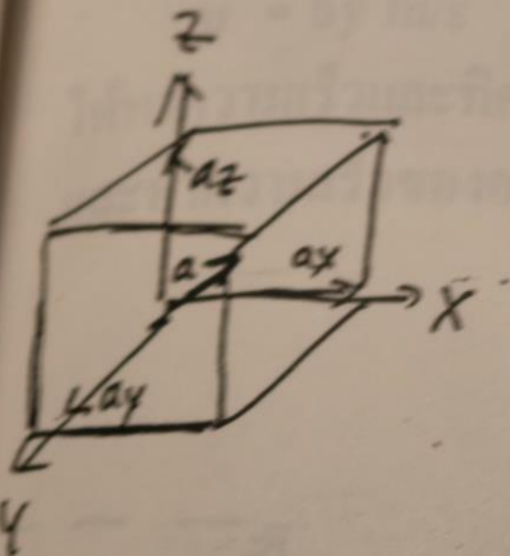
1.1 ความเร็วของอนุภาค

การเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหลจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง สามารถหาความเร็วของอนุภาคได้ โดยพิจารณาจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดที่ต้องการ ระยะทาง dr (ดูรูป)



$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dv}{dt}, \quad w = \frac{dw}{dt}$$
$$\left|\bar{V}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

1.2 ความเร็วของอนุภาค



$$a_x = \frac{du}{dt}, \quad d_y = \frac{dv}{dt}, \quad d_z = \frac{dw}{dt}$$

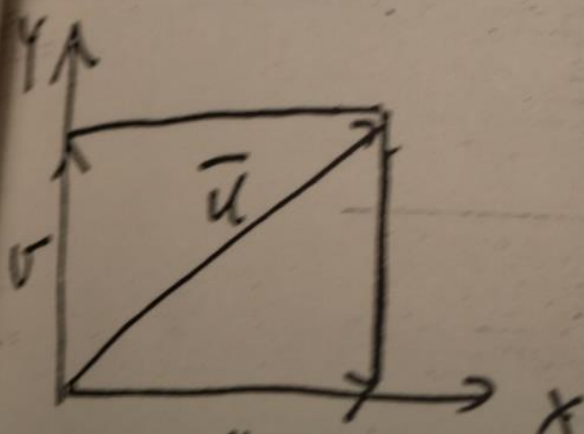
$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_Z^2}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

ในทำนองเดียวกัน $a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$

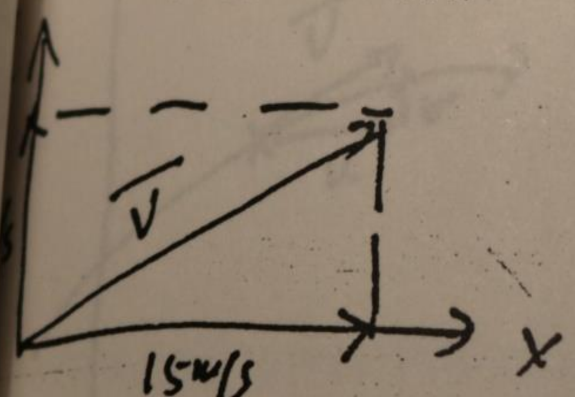
$$a_z = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$



EX. กำหนดให้ความเร็วในสนามการไหล มีสมการดังนี้

$$u = 5y \text{ m/s} \qquad v = 3x \text{ m/s}$$

ให้หาความเร็วและทิศทางของอนุภาคของของไหลที่ตำแหน่ง (2,3) และหาความเร็วของอนุภาคของของไหลที่จุด (2,3)



$$u = 5y$$

$$= 5(3) = 15 \text{ ม/ว}$$

$$v = 3x$$

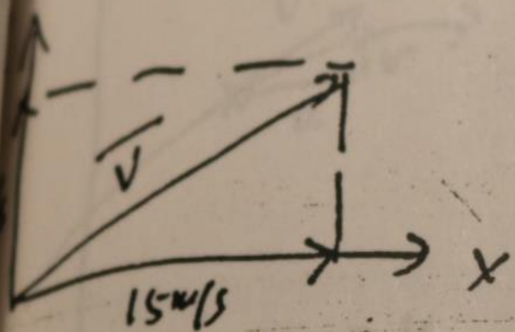
$$= 3(2) = 6 \text{ ม/ว}$$

ความเร็ว $\bar{v} = \sqrt{15^2 + 6^2}$

ทิศทาง $\theta = \tan^{-1}\left|\dfrac{v}{u}\right|$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{6}{15}\right| = 21.8^\circ$$

$$u = 5y$$
$$= 5(3) = 15 \text{ ม/ว}$$
$$v = 3x$$
$$= 3(2) = 6 \text{ ม/ว}$$



ความเร็ว $\bar{v} = \sqrt{15^2 + 6^2}$

ทิศทาง $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{v}{u}\right|$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{6}{15}\right| = 21.8^\circ$$

ณ จุด (2,3) ค่า $a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$

$$= 5y \times \frac{\partial 5y}{\partial y} + 3x\left(\frac{\partial 5y}{\partial y}\right)$$
$$= 5y \times 0 + 3x(5) = 15x$$
$$= 15(2) = 30 \quad m/s^2$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

ณ จุด (2,3) ค่า a_x =

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= 5y \times \frac{\partial 5y}{\partial y} + 3x\left(\frac{\partial 5y}{\partial y}\right)$$

$$= 5y \times 0 + 3x(5) = 15x$$

$$= 15(2) = 30 \quad m/s^2$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$a_y = 5y\frac{\partial 3x}{\partial x} + 3x\frac{\partial 3x}{\partial y}$$

$$= 5y \times 3 + 3x(10)$$

$$= 15y$$

$$= 45 \quad m/s^2$$

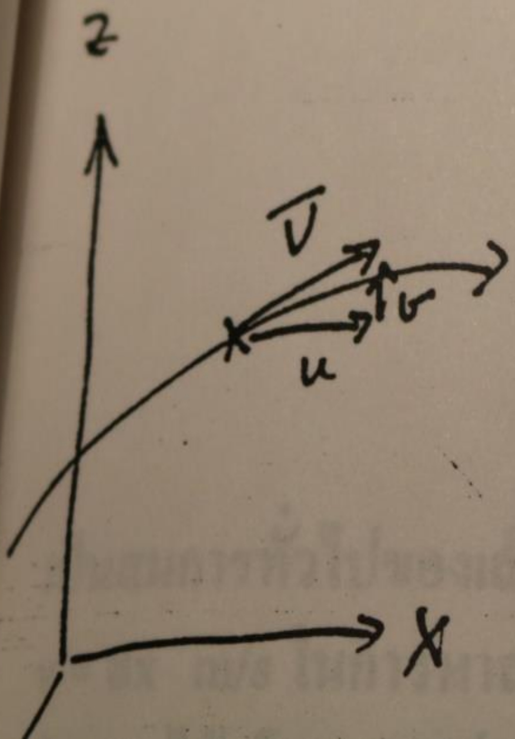
ความเร่งรวม $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$$= \sqrt{20^2 + 45^2}$$

$$= 49.24 \quad m/s^2$$

เส้นแนวการไหล (Stream Line)

คือเส้นที่ลากสัมผัสกับเวกเตอร์ของความเร็ว ในการไหลแบบราบเรียบ แนวการไหลจะเป็นอิสระต่อกัน และไม่ตัดผ่านกัน การหาสมการของเส้นแนวการ หาได้ดังนี้

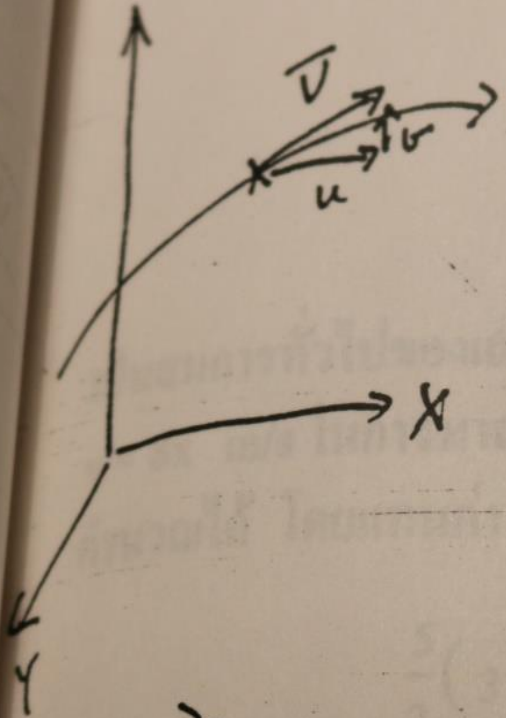


ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ของความเร็ว V สัมผัสกับเส้นแนวการไหลที่จุด P (x,y) โดยมีความเร็ว V และทำมุม θ กับแกน x และ ความเร็วในแกน x และ y คือ u และ v จะได้

$$\frac{v}{u} = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

หรือ $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

หรือ $$u\,dy = v\,dx = 0$$



โดยมีความเร็ว V และทำมุม θ กับแกน x และ
ความเร็วในแกน x และ y คือ u และ v จะได้

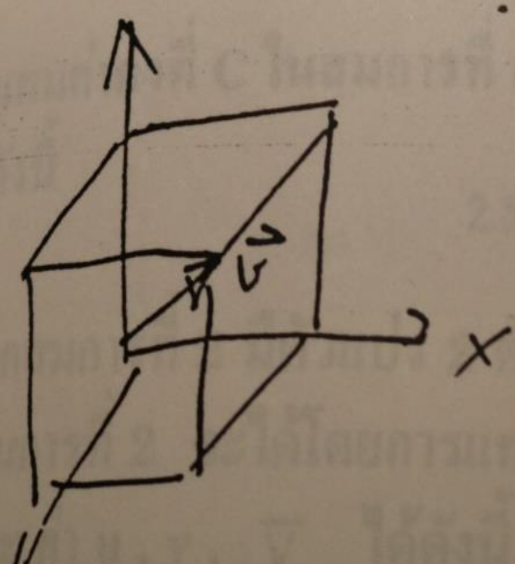
$$\frac{v}{u} = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

หรือ $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

หรือ $$u\,dy = v\,dx = 0$$

ในกรณี 3 มิติก็จะได้ $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

หรือ
$$udy - vdx = 0$$
$$vdz - wdy = 0$$
$$wdx - udz = 0$$



เป็นสมการของเส้นแนวการไหลในกรณี 3 มิติ

กำหนดความเร็วของอนุภาคของของไหล u = 5y m/s และ v = 3x m/s จงเขียนเส้นแนวการไหลของอนุภาคที่ผ่านจุด (2,3) และคำนวณความเร็วของอนุภาคของของไหลที่จุดต่าง ๆ

วิธีทำ จากสมการเส้นแนวการไหล

$$udy - vdx = 0$$

$$5y\,dy - 3x\,dx = 0$$

$$\int 5y\,dy - \int 3x dx = 0$$

$$\frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}x^2 + c = 0 \qquad \text{........(1)}$$

เป็นสมการทั่วไปของเส้นแนวการไหลที่มีความเร็วเท่ากับ u = 5y m/s และ v = 3x m/s ในการหาสมการของเส้นแนวการไหลที่ผ่าน...

$$\frac{\ }{2} y^2 - \frac{\ }{2} x^2 + c = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

เป็นสมการทั่วไปของเส้นแนวการไหลที่มีความเร็วเท่ากับ **u = 5y m/s** และ **v = 3x m/s** ในการหาสมการของเส้นแนวการไหลที่ผ่านจุด (2,3) สามารถคำนวณได้ โดยแทนค่า (x,y) = (2,3) ในสมการที่ (1) จะได้ค่าคงที่ ดังนี้

$$\frac{5}{2}(3)^2 - \frac{3}{2}(2)^2 + C = 0$$

$$C = -16.$$

แทนค่าคงที่ C ในสมการที่ (1) จะได้สมการของเส้นแบ่งการไหลที่ผ่านจุด(2,3) ดังนี้

$$2.5\, y^2 - 1.5\, x^2 - 16.5 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

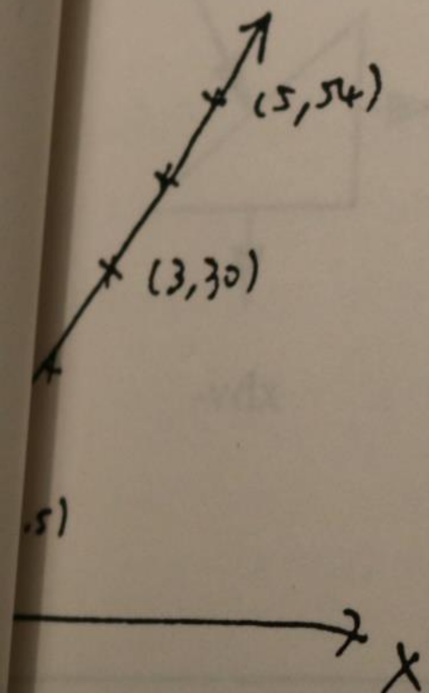
จากสมการที่ 2 มีตัวแปร 2 ตัว คือ X , Y ถ้าต้องการเขียนเส้นแนวการไหลของสมการที่ 2 จะได้โดยการแทนค่า X , Y เพื่อหาตำแหน่งที่เส้นแนวการไหลผ่าน และ ค่า u , v , $\overline{V}$ ได้ดังนี้

$$C = -16.$$

แทนค่าคงที่ C ในสมการที่ (1) จะได้สมการของเส้นแบ่งการไหลที่ผ่านจุด(2,3) ดังนี้

$$2.5\,y^2 - 1.5\,x^2 - 16.5 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

จากสมการที่ 2 มีตัวแปร 2 ตัว คือ X , Y ถ้าต้องการเขียนเส้นแนวการไหลของสมการที่ 2 จะได้โดยการแทนค่า X , Y เพื่อหาตำแหน่งที่เส้นแนวการไหลผ่าน และ ค่า u , v , $\overline{V}$ ได้ดังนี้



x	0	1	2	3	4	5
y	16.5	18.0	22.5	30.0	40.5	54
u	82.5	90.0	112.5	450	8201.25	14580
v	0	3	6	9	12	15
·	82.5	90.04	112.6	450	8210	14580

Stream function :

ฟังก์ชั่นที่อธิบายรูปแบบของเส้นแนวการไหลใช้สัญลักษณ์

ψ (PSI)

ψ : (psi) = stream function

q:อัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้างเป็นฟังก์ชั่นของ x,y

$q = \psi = f(x,y)$

$dq = udy - vdx$

ถ้าเป็นในเส้นแนวทางไหล

$dq = 0 = udy - vdx$

$q = C$ (constant)

ฟังก์ชันที่อธิบายรูปแบบของเส้นแนวการไหลใช้สัญลักษณ์

(PSI)

ψ : (psi) = stream function

q:อัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้างเป็นฟังก์ชั่นของ x,y

$$q = \psi = f(x,y)$$

$$dq = udy-vdx \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้าเป็นในเส้นแนวทางไหล

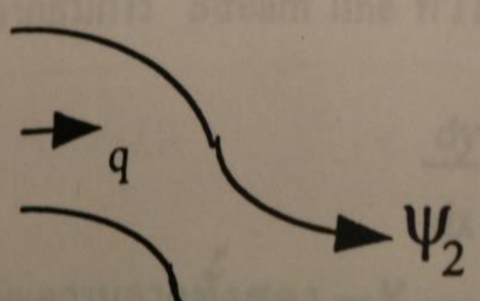
$$dq = 0 = udy - vdx$$

$$q = C \text{ (constant)}$$

$$dq = d\psi$$

$$d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy \qquad \text{.............(2)}$$

จาก e.g.(1),(2) $u = \frac{\psi}{y}$; $v = -\frac{\psi}{x}$ ....(3)



$$\int^{\psi_2}$$

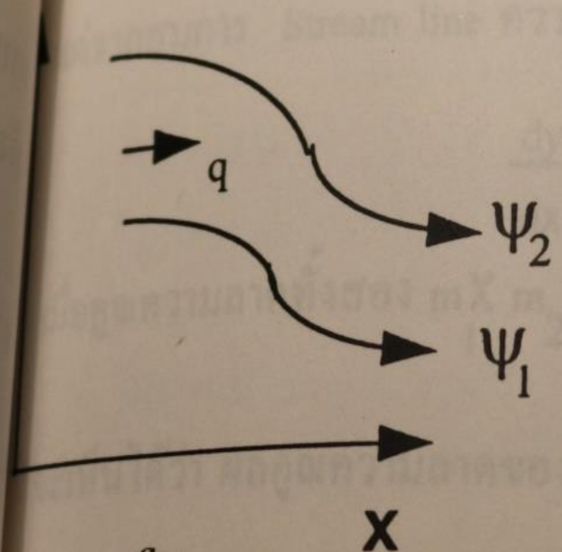
$$dq = 0 = udy - vdx$$

$$q = C \text{ (constant)}$$

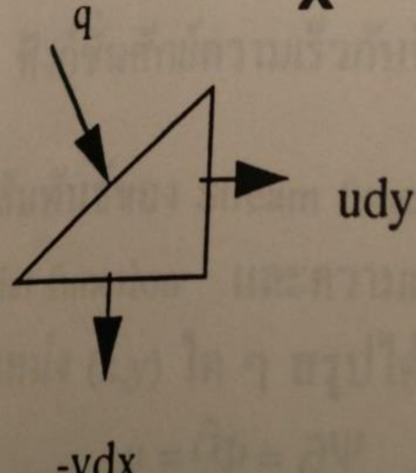
$$dq = d\psi$$

$$d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy \qquad \text{..............(2)}$$

จาก e.g.(1),(2) $u = \frac{\psi}{y}$; $v = -\frac{\psi}{x}$ ....(3)



$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \text{...........(4)}$$



ฟังก์ชั่นของศักย์ความเร็ว (*velocity potential function*)

Φ (phi) : ฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว

ฟังก์ชั่นของระยะทางกับความเร็วในทิศทางความเร็ว

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = V_s \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

$$= udx + vdy + wdz$$

เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงศักย์ความเร็วจะสามารถหาเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน(equipotentialin
ได้จาก $d\Phi = 0$ หรือ

$$d\Phi = 0 = udx+vdy+wdz$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

$$= udx + vdy + wdz$$

เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงศักย์ความเร็วจะสามารถหาเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน(equipotentialine) ได้จาก $d\Phi = 0$ หรือ

$$d\Phi = 0 = udx+vdy+wdz$$

ในกรณีการไหล 2 มิติ $udx+vdy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} = m_1$$

เมื่อ m_1 คือ ความลาดของศักย์ความเร็วเท่ากัน

แต่จากสมการ Stream line ความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = m_2$$

m_2 คือ ความลาดของเส้นแนวการไหล

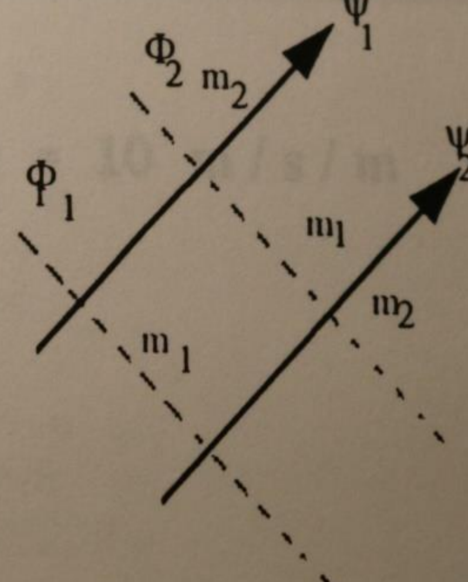
เมื่อคูณความลาดทั้งสอง

แต่จากสมการ Stream line ความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = m_2$$ m_2 คือ ความลาดของเส้นแนวการไหล

เมื่อคูณความลาดทั้งสอง $m_1 \times m_2 = \left(-\frac{u}{v}\right)\left(\frac{v}{u}\right) = -1$

จะเห็นได้ว่า ผลคูณความลาดของเส้น Velocity potential และเส้นStream lineเท่ากับ -1แสดงว่า ฟังก์ชั่นศักย์ความเร็วกับฟังก์ชั่นของการไหลตั้งฉากกัน



ความสัมพันธ์ของ Stream function (ψ) และ Velocity potential function และความเร็วของอนุภาค (u,v) ในตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ สรุปได้ดังนี้

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{-\partial \psi}{\partial y}$$

Ex เมื่อฟังก์ชั่นของการไหล = x - y จงหาความเร็วและทิศทางการไหลของอนุภาคของของไหลที่จุด P (1 , 2)

วิธีทำ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \left(x^2 - y^3\right)}{\partial y} = -3y^2$$

ที่จุด P (1,2) $u = -3\left(2\right)^2$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \left(x^2 - y^3\right)}{\partial x} = -2x$$

$$v = -2(1) = -2 \text{ ม/ว}$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} = 12.17 \text{ ม/ว}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(v)}{u} = \tan^{-1}\frac{(2)}{12} = 9^\circ 27' 44.36''$$

อนุภาคของของไหลที่จุด P (1 , 2)

<u>วิธีทำ</u> $u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2 - y^3\right)}{\partial y} = -3y^2$

ที่จุด P (1,2) $u = -3\left(2\right)^2$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\left(x^2 - y^3\right)}{\partial x} = -2x$

$v = -2(1) =$ -2 ม/ว

$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} =$ 12.17 ม/ว

$\theta = \tan^{-1}\frac{(v)}{u} = \tan^{-1}\frac{(2)}{12} = 9^\circ 27' 44.36''$

ลากเส้น Stream Line

$\psi = x^2 - y^3$

$\psi =$ ค่าคงที่ $C = x^3 - y^3$

ลากเส้น Stream Line

$$\psi = x^2 - y^3$$

$$\psi = \text{ค่าคงที่ } C = x^3 - y^3$$

$\psi = 10$	x	-12	-1	0	1	2	3
	y	-18	-2.08	-2.15	2.08	-1.8	1
$\psi = 0$	x	-2	-1	0	1	2	3
	y	1.5	1	0	1	1.5	2.08

$$= \psi_2 - \psi_1 = 10 - 0 = 10 \text{ m/s/m}$$

Stream function :

ฟังก์ชั่นที่อธิบายรูปแบบของเส้นแนวการไหลใช้สัญลักษณ์

ψ (PSI)

ψ : (psi) = stream function

q:อัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้างเป็นฟังก์ชั่นของ x,y

$q = \psi = f(x,y)$

$dq = udy - vdx$ ....(1)

ถ้าเป็นในเส้นแนวทางไหล

$dq = 0 = udy - vdx$

$q = C$ (constant)

$dq = d\psi$

q:อัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้างเป็นฟังก์ชั่นของ x,y

$$q = \psi = f(x,y)$$

$$dq = udy-vdx \qquad \text{...........(1)}$$

ถ้าเป็นในเส้นแนวทางไหล

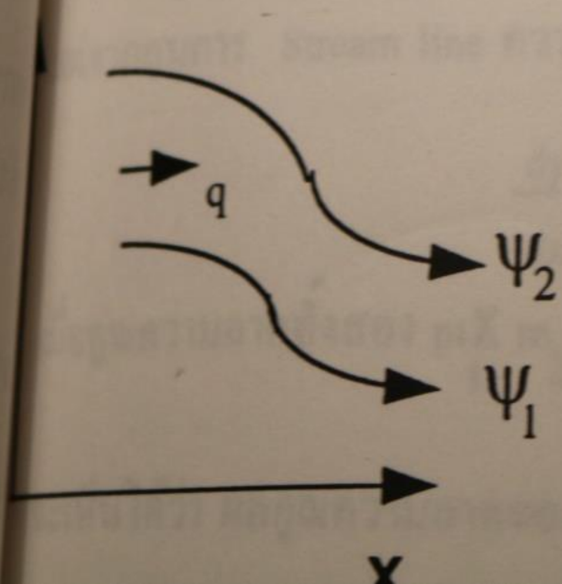
$$dq = 0 = udy - vdx$$

$$q = C \text{ (constant)}$$

$$dq = d\psi$$

$$d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy \qquad \text{..............(2)}$$

จาก e.g.(1),(2) $u = \frac{\psi}{y}$; $v = -\frac{\psi}{x}$ ....(3)



$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \text{...........(4)}$$

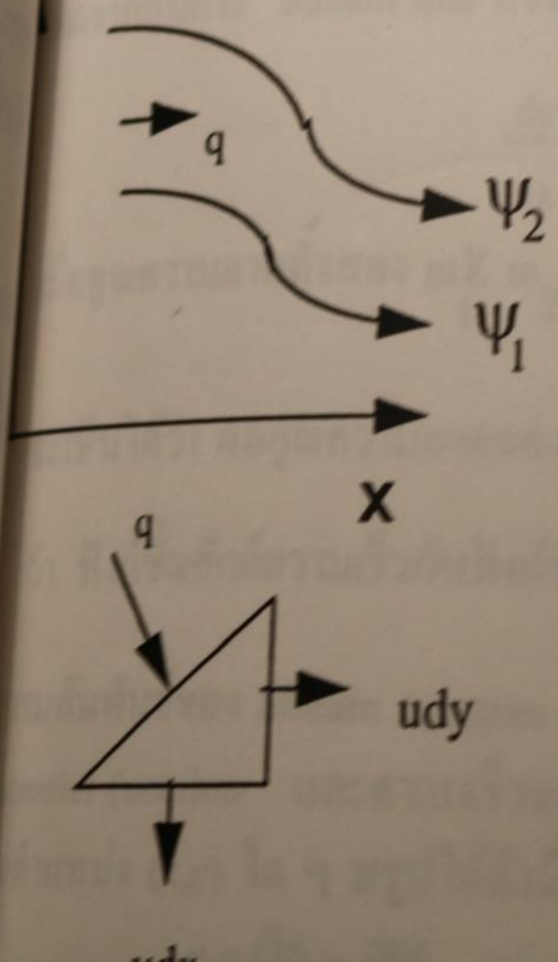
$$dq = 0 = udy - vdx$$

$$q = C \text{ (constant)}$$

$$dq = d\psi$$

$$d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy \qquad \text{..............(2)}$$

จาก e.g.(1),(2) $u = \frac{\psi}{y}$; $v = -\frac{\psi}{x}$ ....(3)



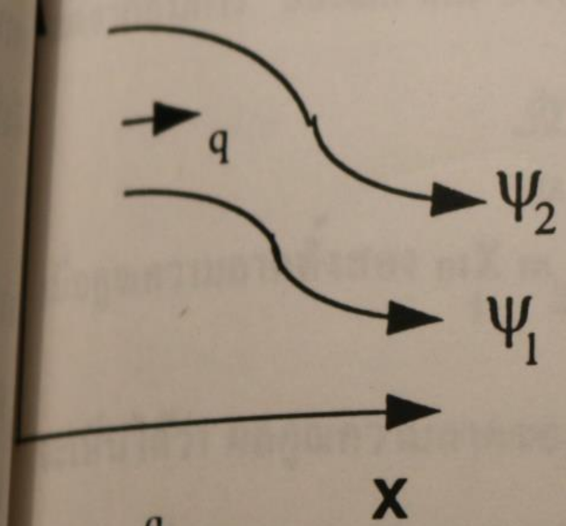
$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \text{..........(4)}$$

$$q = C \text{ (constant)}$$

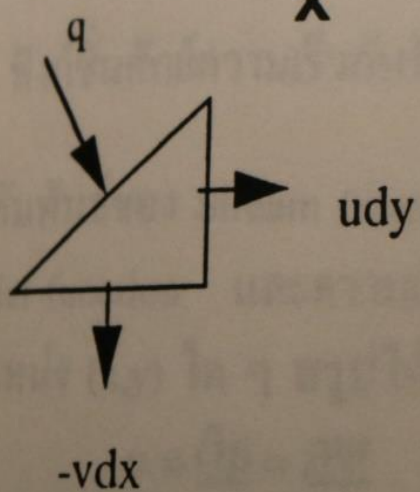
$$dq = d\psi$$

$$d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy \qquad \text{.............(2)}$$

จาก e.g.(1),(2) $u = \frac{\psi}{y}$; $v = -\frac{\psi}{x}$ ....(3)



$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \text{..........(4)}$$



ฟังก์ชั่นของศักย์ความเร็ว (*velocity potential function*)

Φ (phi) : ฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว

ฟังก์ชั่นของระยะทางกับความเร็วในทิศทางความเร็ว

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = V_s \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

$$= udx + vdy + wdz$$

เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงศักย์ความเร็วจะสามารถหาเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน(equipotentialine) ได้จาก $d\Phi = 0$ หรือ

$$d\Phi = 0 = udx+vdy+wdz$$

ในกรณีการไหล 2 มิติ $udx + vdy = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

$$= udx + vdy + wdz$$

เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงศักย์ความเร็วจะสามารถหาเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน(equipotentialine)
ได้จาก $d\Phi = 0$ หรือ

$$d\Phi = 0 = udx+vdy+wdz$$

ในกรณีการไหล 2 มิติ $udx+vdy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} = m_1$$

เมื่อ m_1 คือ ความลาดของศักย์ความเร็วเท่ากัน

แต่จากสมการ Stream line ความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = m_2$$

m_2 คือ ความลาดของเส้นแนวการไหล

เมื่อคูณความลาดทั้งสอง $m_1 \times m_2 = \left(-\frac{u}{v}\right)\left(\frac{v}{u}\right) = -1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} = m_1$$

เมื่อ m_1 คือ ความลาดของศักย์ความเร็วเท่ากัน

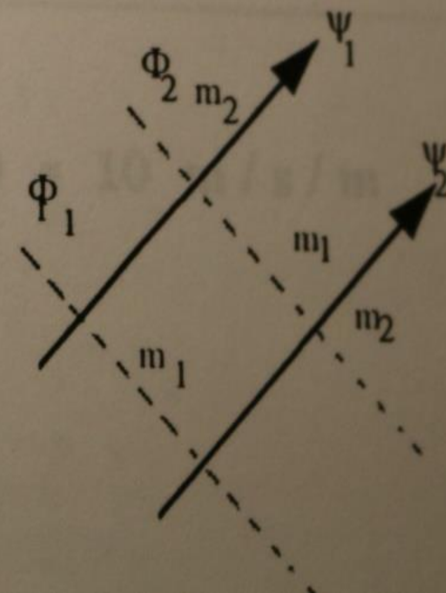
แต่จากสมการ Stream line ความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = m_2$$

m_2 คือ ความลาดของเส้นแนวการไหล

เมื่อคูณความลาดทั้งสอง $m_1 \times m_2 = \left(-\frac{u}{v}\right)\left(\frac{v}{u}\right) = -1$

จะเห็นได้ว่า ผลคูณความลาดของเส้น Velocity potential และเส้นStream lineเท่ากับ -1แสดงว่า ฟังก์ชั่นศักย์ความเร็วกับฟังก์ชั่นของการไหลตั้งฉากกัน



ความสัมพันธ์ของ Stream function (ψ) และ Velocity potential function และความเร็วของอนุภาค (u,v) ในตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ สรุปได้ดังนี้

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

เมื่อฟังก์ชั่นของการไหล = x - y จงหาความเร็วและทิศทางการไหลของอนุภาคของของไหลที่จุด P (1 , 2)

<u>วิธีทำ</u>

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \left(x^2 - y^3\right)}{\partial y} = -3y^2$$

ที่จุด P (1,2) $u = -3\left(2\right)^2$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \left(x^2 - y^3\right)}{\partial x} = -2x$$

$$v = -2(1) = -2 \text{ ม/ว}$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} = 12.17 \text{ ม/ว}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(v)}{u} = \tan^{-1}\frac{(2)}{12} = 9^\circ 27' 44.36''$$

ลากเส้น Stream Line

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} = 12.17 \text{ ม/ว}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(v)}{u} = \tan^{-1}\frac{(2)}{12} = 9^\circ 27' 44.36''$$

ลากเส้น Stream Line

$$\psi = x^2 - y^3$$

$$\psi = \text{ค่าคงที่ } C = x^3 - y^3$$

$\psi = 10$	x	-12	-1	0	1	2	3
	y	-18	-2.08	-2.15	2.08	-1.8	1
$\psi = 0$	x	-2	-1	0	1	2	3
	y	1.5	1	0	1	1.5	2.08

$$= \psi_2 - \psi_1 = 10 - 0 = 10 \text{ m/s/m}$$

Ex กำหนดให้ฟังก์ชั่นของการไหล เท่ากับ $\psi = xy$ ให้หาฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว (ϕ) และวาดเส้นแนวการไหล และเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน

เนื่องจาก
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x \qquad \text{..........(1)}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y \qquad \text{..........(2)}$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่าสมการที่ 1 , 2 ลงใน 3 จะได้

$$d\phi = x\,dx - y\,dy$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -y \qquad \text{..........(2)}$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่าสมการที่ 1 , 2 ลงใน 3 จะได้

$$d\phi = x\,dx - y\,dy$$

$$\int d\phi = \int xdx - \int ydy$$

สมการฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว $\phi \doteq \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C$ ....(4)

จากสมการเส้นแนวการไหล $\psi = xy$ และฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว $\phi = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C$

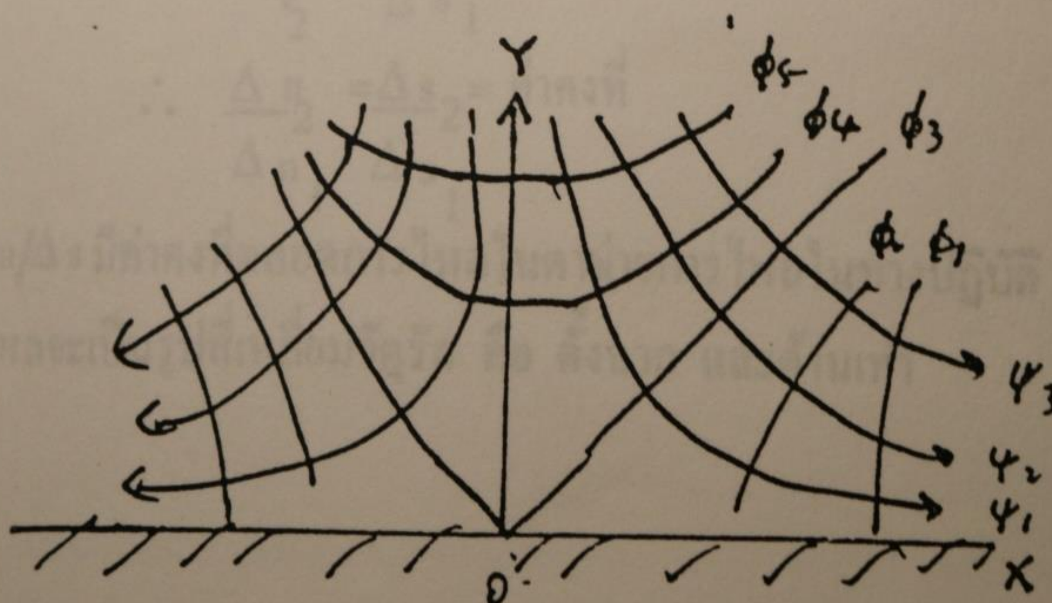
สามารถวาดรูปเส้นแนวการไหล และเส้นศักย์ความเร็วเท่ากันได้ดังนี้

$\int d\phi = \int x dx - \int y dy$

สมการฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว $\phi \doteq \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C$ ....(4)

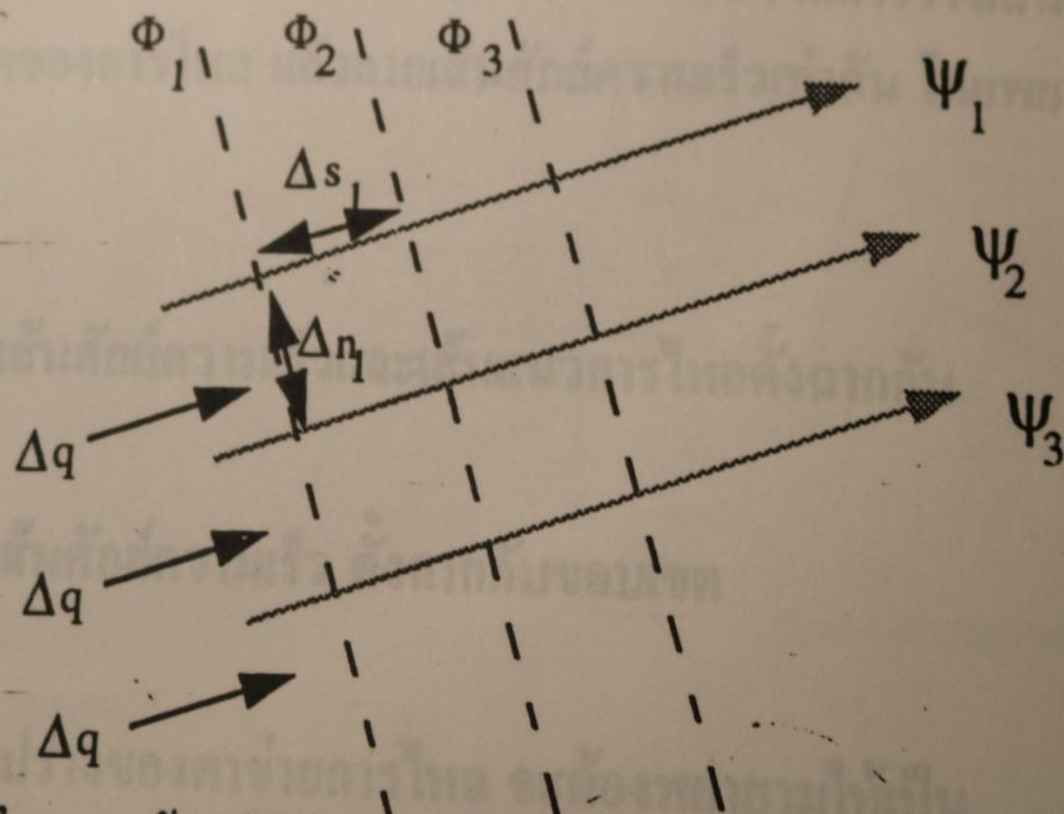
จากสมการเส้นแนวการไหล $\psi = xy$ และฟังก์ชั่นศักย์ความเร็ว $\phi = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C$

สามารถวาดรูปเส้นแนวการไหล และเส้นศักย์ความเร็วเท่ากันได้ดังนี้

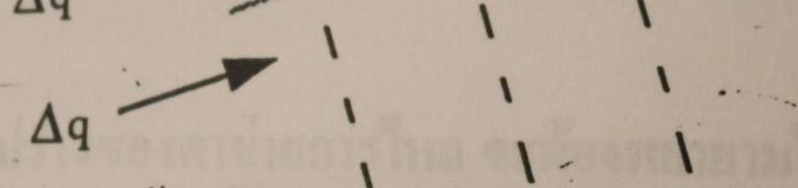


ข่ายการไหล (flow net)

.1 หลักการ วิธีการที่ใช้วิเคราะห์การไหลที่ไม่มีการหมุน ลักษณะของตาข่ายการไหล ประกอบด้วยเส้น Stream line และเส้น equipotential ตัดกัน



ะหว่างเส้นแนวการไหล 2 เส้น มีช่องทางการไหลเป็นลักษณะท่อการไหล (Stream Tube)
้าพิจารณาความกว้างที่ตั้งฉากกับกระดาษ/หน่วย จะสามารถหาอัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วย



ะหว่างเส้นแนวการไหล 2 เส้น มีช่องทางการไหลเป็นลักษณะท่อการไหล (Stream Tube)
ว้าพิจารณาความกว้างที่ตั้งฉากกับกระดาษ/หน่วย จะสามารถหาอัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วย
มกว้าง q ได้โดยใช้สมการไหลต่อเนื่อง

$$\Delta q = V_1 \Delta n_1 = V_2 \Delta n_2 = \text{ค่าคงที่}$$

$\Delta n_1, \Delta n_2$ คือ ระยะทางระหว่างเส้นแนวการไหล 2 เส้น

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \quad \text{.............(1)}$$

จากการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นศักย์ความเร็วเท่ากับผลคูณของความเร็วกับระยะระหว่าง
ศักย์ความเร็วเท่ากัน

$$\Delta \Phi = V_1 \Delta s_1 = V_2 \Delta s_2 = \text{ค่าคงที่}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \quad \text{.............(2)}$$

$$\therefore \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} = \text{ค่าคงที่}$$

ะหว่างเส้นแนวการไหล 2 เส้น มีช่องทางการไหลเป็นลักษณะท่อการไหล (Stream Tube) าพิจารณาความกว้างที่ตั้งฉากกับกระดาษ/หน่วย จะสามารถหาอัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วย มกว้าง q ได้โดยใช้สมการไหลต่อเนื่อง

$$\Delta q = V_1 \Delta n_1 = V_2 \Delta n_2 = \text{ค่าคงที่}$$

$\Delta n_1, \Delta n_2$ คือ ระยะทางระหว่างเส้นแนวการไหล 2 เส้น

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \quad \text{.............(1)}$$

จากการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นศักย์ความเร็วเท่ากับผลคูณของความเร็วกับระยะระหว่าง ักย์ความเร็วเท่ากัน

$$\Delta \Phi = V_1 \Delta s_1 = V_2 \Delta s_2 = \text{ค่าคงที่}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \quad \text{.............(2)}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} = \text{ค่าคงที่}$$

หนดให้ $\Delta n / \Delta s$ มีค่าคงที่ตลอดการไหลในตาข่ายการไหลในทางปฏิบัติ จะเท่ากับ 1 รูปแบบ าข่ายการไหลจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ ตั้งฉาก และด้านเท่า

2 วิธีการเขียนตาข่ายการไหล นั้น อาจจะใช้เครื่องมือช่วย เช่น
น้ำ หรือ คอมพิวเตอร์) หรือ Trial and error เริ่มจากการร่างเส้นแนวการไหล
หว่างขอบเขตของการไหล แล้วลากเส้นศักย์ความเร็วเท่ากัน โดยพยายามให้

1. เส้นศักย์ความเร็วและเส้นแนวการไหลตั้งฉากกัน

2. เส้นศักย์ความเร็ว ตั้งฉากกับขอบเขต

3. รูปร่างของตาข่ายการไหล จะต้องพยายามให้เป็น

4. เส้นทแยงมุมของตาข่ายการไหล ตัดกันเป็นมุมฉาก

วอย่างการประยุกต์ใช้ (Sample of Application)

in pipe

without structure

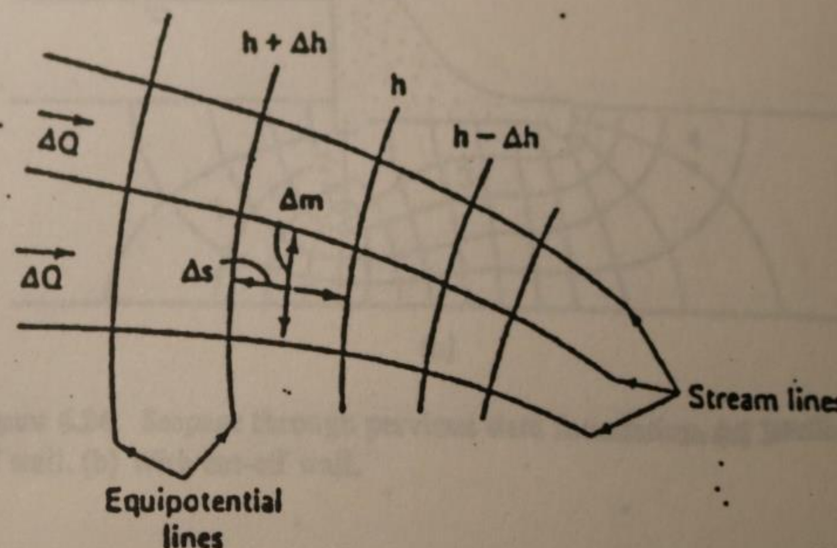
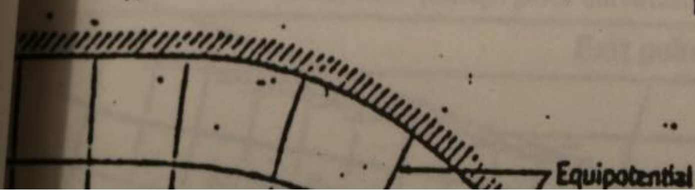
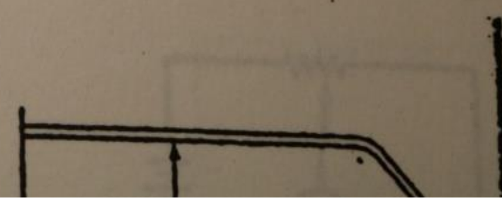


Figure 6.23. Flow net.

with structure





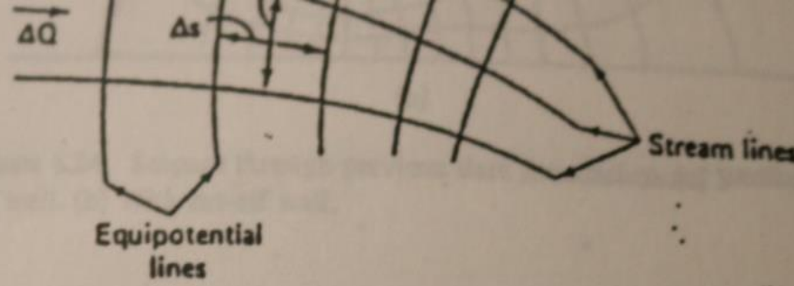
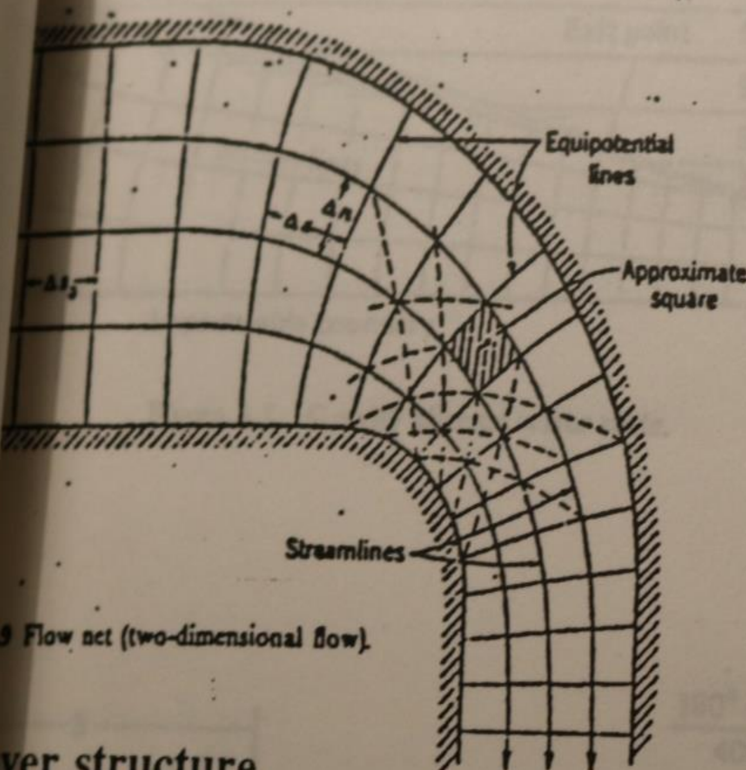
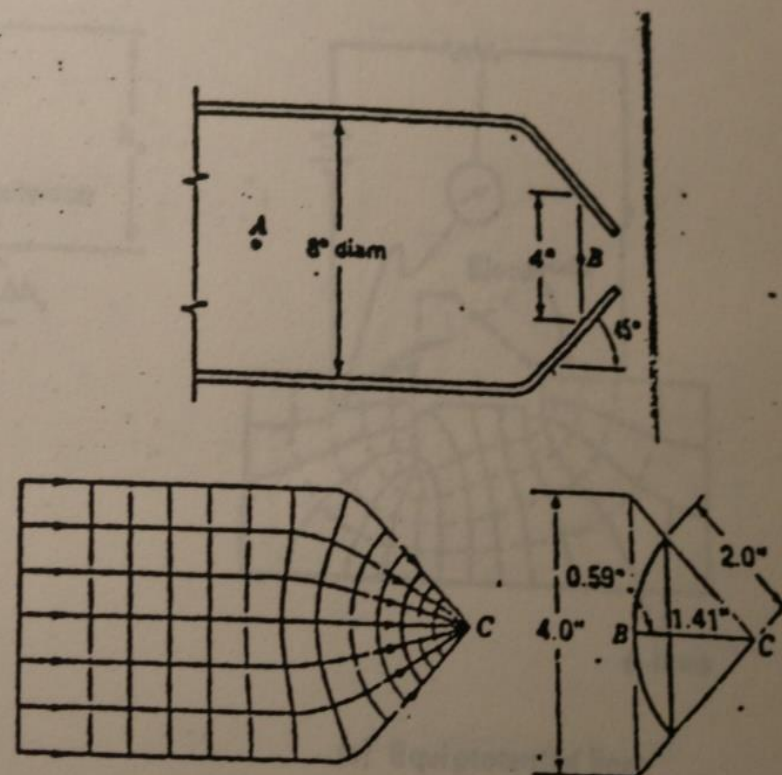


Figure 6.23. Flow net.

with structure

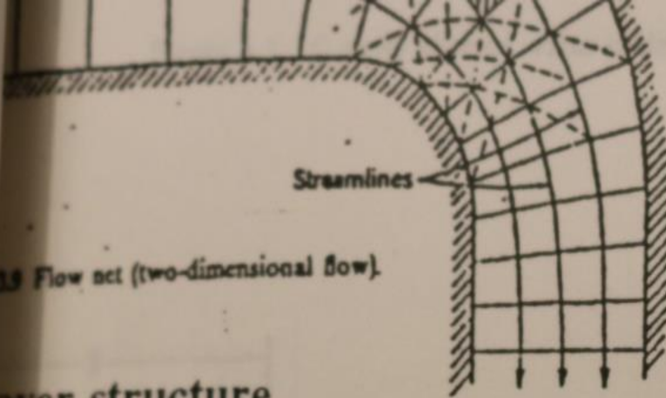


3.9 Flow net (two-dimensional flow).

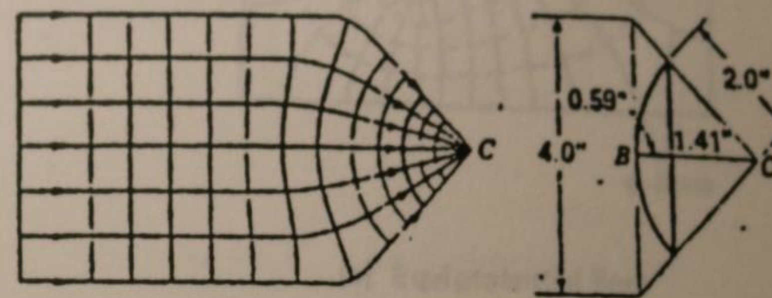


Illustrative Example 3.1

over structure

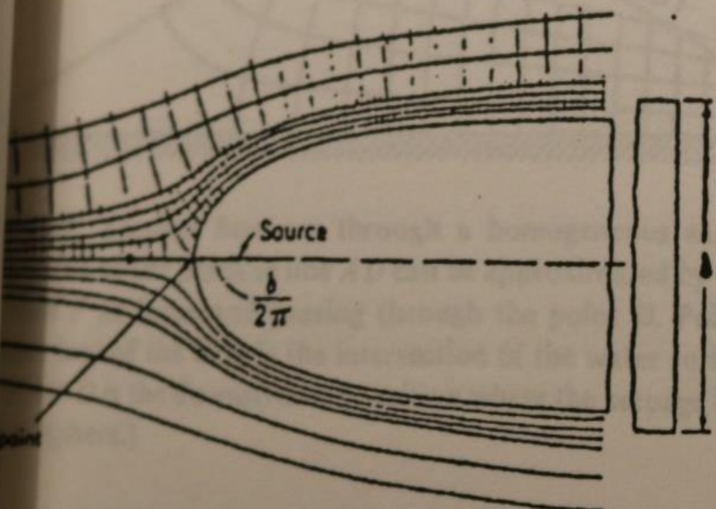


3.9 Flow net (two-dimensional flow).

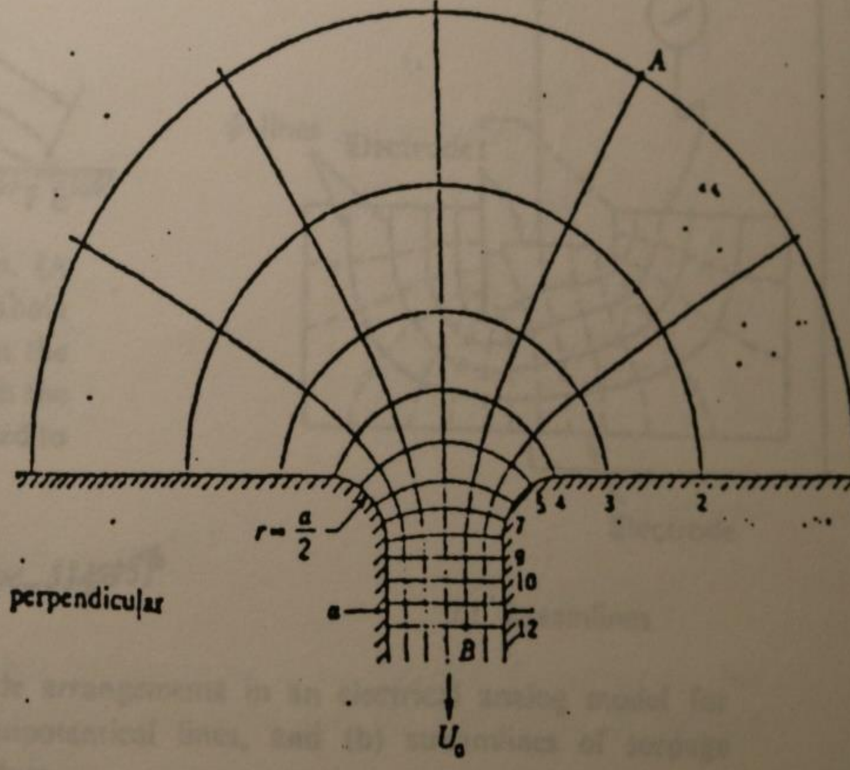


Illustrative Example 3.1

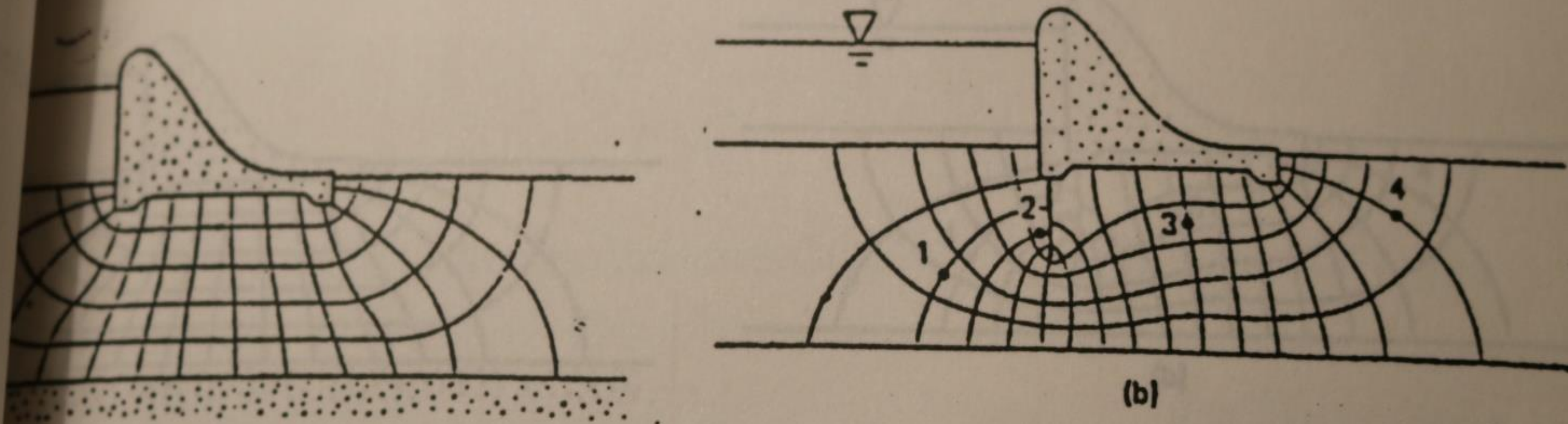
over structure



Two-dimensional flow of a frictionless fluid past a solid whose surface is perpendicular
of the paper. Streamlines or path lines for steady flow.

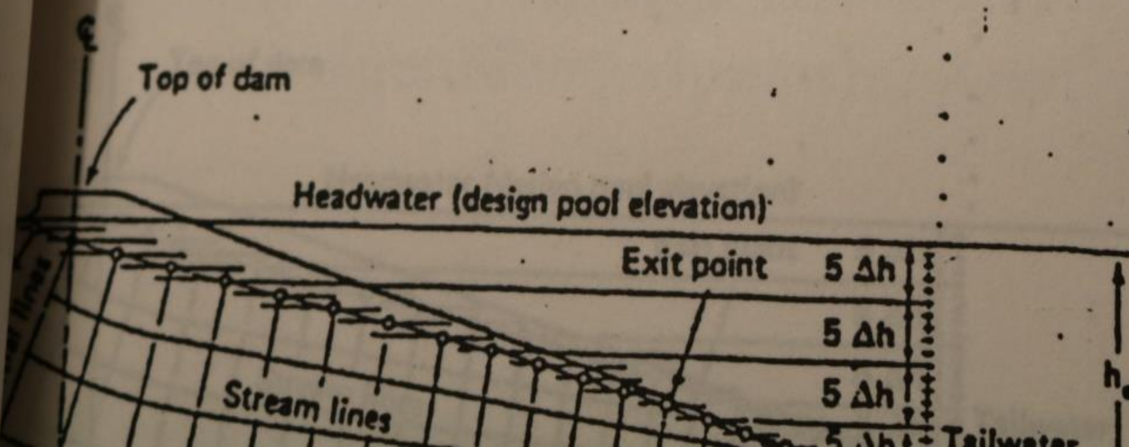


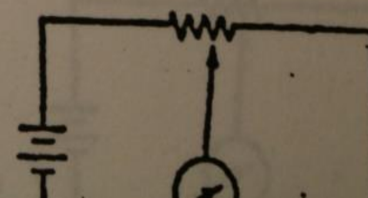
ow under structure



(a) (b)

Figure 6.24. Seepage through pervious dam foundation. (a) Without cut-off wall. (b) With cut-off wall.





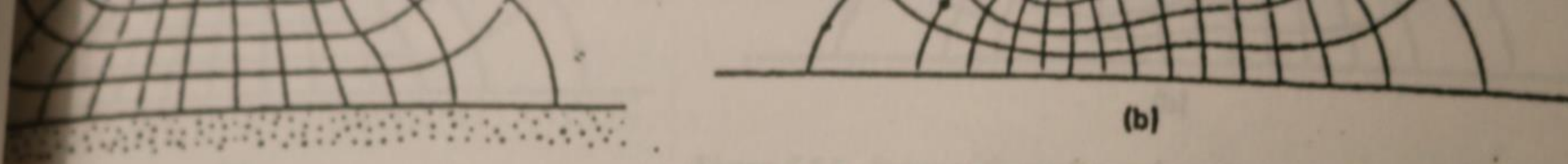


Figure 6.24. Seepage through pervious dam foundation. (a) Without cut-off wall. (b) With cut-off wall.

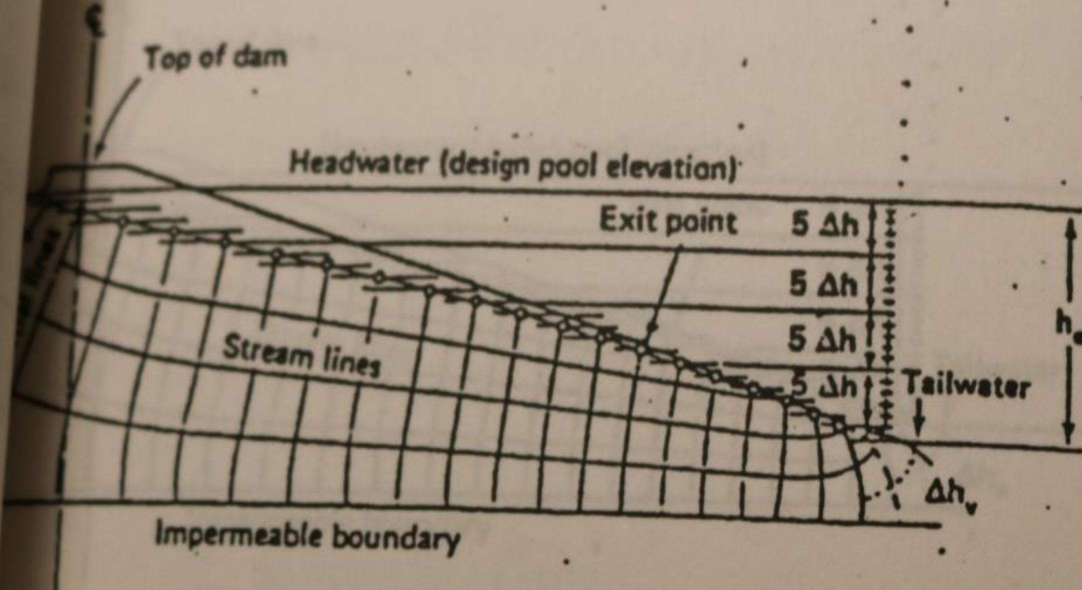
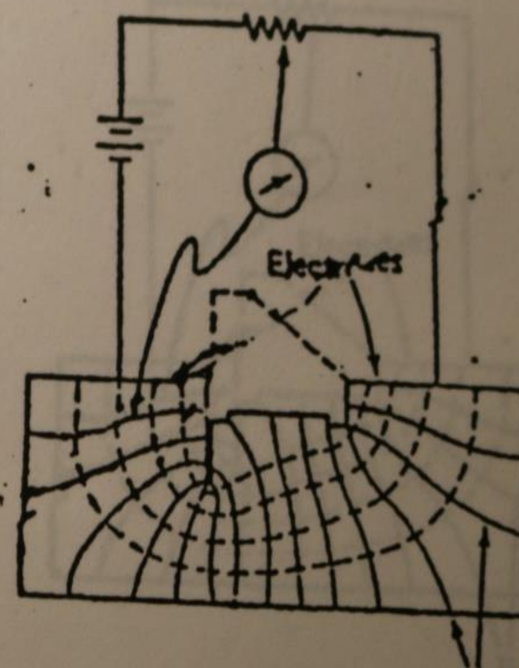
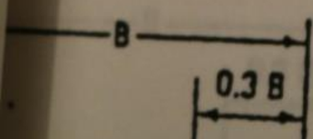
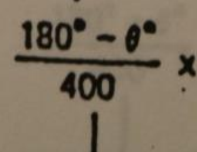


Figure A.1. Gravity affected water table.



(a) Equiptotential lines





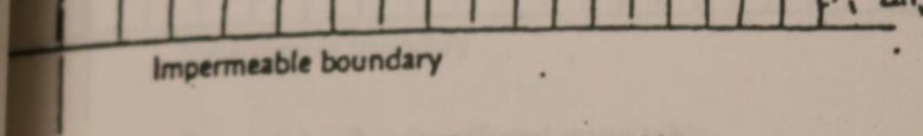
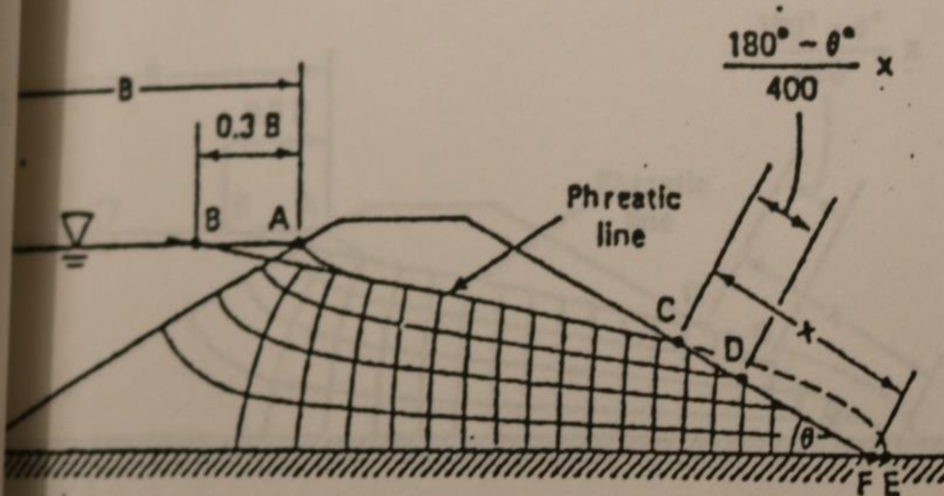
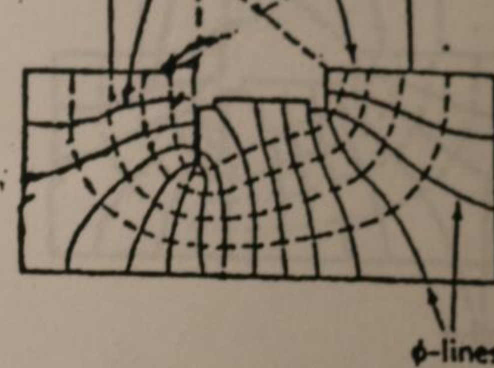


Figure A.1. Gravity affected water table.

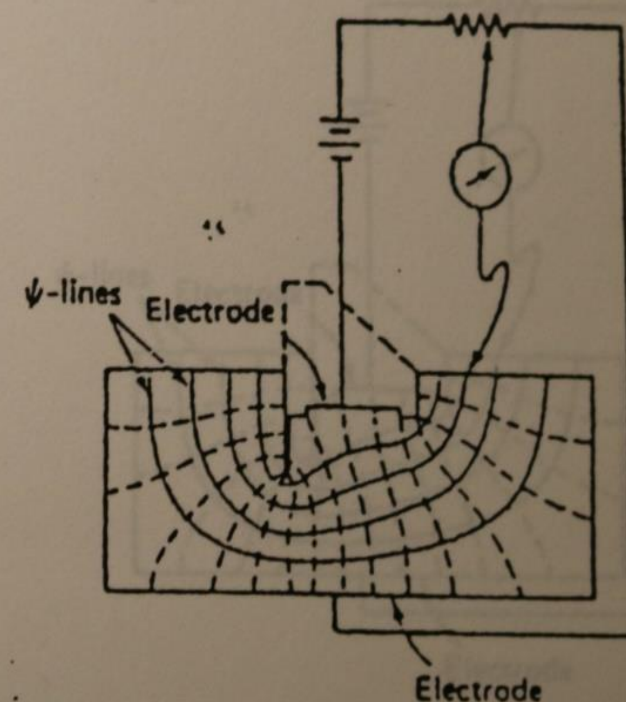


re 6.27. Seepage flow net through a homogeneous earth dam. (A portion of the phreatic line AD can be approximated by the parabola with F as focus and passing through the point B. Point A on the ream face of the dam is the intersection of the water surface with the . Point D is the downstream transition where the seepage is exposed to atmosphere.)

rande, "Seepage Through Dams," *J. New Eng. Water Works Assoc.*, 51



(a) Equiptotential lines



(b) Streamlines

Figure A.2. Electrode arrangements in an electrical analog model for determining (a) equipotentical lines, and (b) streamlines of seepage

quiz

Homework Lesson 8

1. Which of the following velocity fields satisfies conservation of mass for incompressible plane flow ?

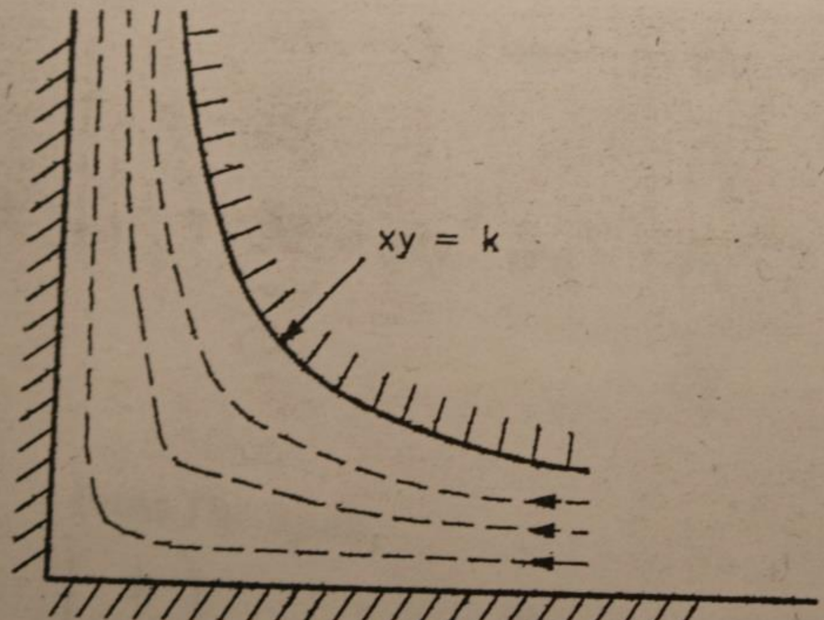
(a) $u = -x$, $v = y$, (b) $u = 3y$, $v = 3x$

(c) $u = 4x$, $v = -4y$, (d) $u = 3xt$, $v = 3yt$.

(e) $u = xy + y^2 t$, $v = xy$, (f) $u = 4x^2 y^3$, $v = -2xy^4$

2. For the steady two-dimensional flow shown in the figure, the scalar components of the velocity field are $V_x = -x$, $V_y = y$, $V_z = 0$ Find the equations of the streamlines and the components of acceleration.

2. For the steady two-dimensional flow shown in the figure, the scalar components of the velocity field are $V_x = -x$, $V_y = y$, $V_z = 0$ Find the equations of the streamlines and the components of acceleration.



Solution Lesson 8

1. In order to satisfy continuity

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, Therefore, it does satisfy.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, Therefore, it does satisfy.

(c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = -4$, Therefore, it does satisfy.

(d) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3t$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = 3t$, Therefore, it does not satisfy.

(e) $\frac{\partial u}{\partial x} = y$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = X$, Therefore, it does not satisfy.

(f) $\frac{\partial u}{\partial x} = 8Xy^3$; and $\frac{\partial v}{\partial y} = -8Xy^3$,Therefore, it does satisfy.

$$\partial x \qquad \partial y$$

2. From The figure,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{stream} = \frac{Vy}{Vx} = \frac{-y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad ; \quad \ln y = -\ln x + \ln c$$

$$\text{Hence} \quad xy = c$$

The stream lines form a family of rectangular hyperbolas .

The wetted boundaries are part of the family.

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0 + (-x)(-1) + (y)0 + 0$$

$$= x$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0 + (-x)0 + (y)(1) + 0$$

$$= y$$

$$a_z = 0$$

$$a = x\,v_x + y\,v_y = ix + jy$$