Dimensional Analysis

Sucharit Koontanakulvong

Hydraulics

2017

บทที่ 7 การวิเคราะห์มิติเชิงหน่วย และความคล้ายคลึงกันทางชลศาสตร์

บทนี้จะทบทวนนิยามของมิติ การวิเคราะห์มิติ ความจำเป็นของการใช้แบบจำลองทางชลศาสตร์ ทฤษฎีความคล้ายคลึงกันทางชลศาสตร์ และพารามิเตอร์ไร้หน่วยที่สำคัญ

เนื้อหา

1. การวิเคราะห์มิติเชิงหน่วย
2. แบบจำลองทางชลศาสตร์
3. ทฤษฎีความคล้ายคลึงกันทางชลศาสตร์
4. พารามิเตอร์ไร้หน่วยที่สำคัญ
5. อัตราส่วนของแกนเวลา

From A Tuantan's sheet

บทที่ 7 การวิเคราะห์มิติวัดและความคล้ายคลึง(Dimensional Analysis and Similitude)

7.1 การวิเคราะห์มิติวัด

เป็นวิธีการจัดตัวแปรต่างๆ ให้เป็นกลุ่มตัวแปร โดยทำให้ภายในแต่ละกลุ่มมีความสัมพันธ์ที่ไม่มีมิติวัดหรือ มิติวัดเป็นศูนย์(dimensionless parameter) จากนั้นในการทดลองจะหาความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มตัวแปรเหล่านั้น ดังนั้น วิธีการนี้จะช่วยลดปริมาณของทดลองเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัว

ทฤษฎีพายของบักกิงแฮม(Buckingham-Π theory)

เป็นวิธีการหรือทฤษฎีที่นิยมและใช้กันแพร่หลายวิธีหนึ่ง มีหลักการคือ ถ้ามีตัวแปรของปัญหาที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันอยู่ "n" ตัวแปร($x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$) สามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ได้คือ

$x_1 = f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ หรือ $f'(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = 0$

ตัวแปรเหล่านี้สามารถรวมเป็นกลุ่มตัวแปรที่ไม่มีมิติวัดได้ "n-m" กลุ่ม โดย "m" คือจำนวนของมิติวัดหลักของตัวแปรทั้งหมด นั่นคือ

$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0$ หรือ $\Pi_1 = \Phi'(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_{n-m})$

โดย "Π" คือกลุ่มตัวแปรที่ไม่มีมิติวัด

ขั้นตอนในการหากลุ่มตัวแปรของความสัมพันธ์ต่างๆ ตามทฤษฎีΠ มีดังนี้คือ

1. ระบุตัวแปรต่างๆที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (สมมติให้ "n" เป็นจำนวนของตัวแปร)
2. เลือกระบบของมิติวัดหลัก(ระบบ"MLt" หรือระบบ"FLt")และกำหนดมิติวัดหลัก
3. ระบุมิติวัดของตัวแปรแต่ละตัวในเทอมของมิติวัดหลัก(M, L, t) โดยที่ M=มวล, L= ความยาวและt=เวลา
4. หาจำนวนตัวแปรของตัวแปรซ้ำ(repeating variables) ซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของมิติวัดหลัก (สมมติให้ "m" เป็นจำนวนของตัวแปรซ้ำ) และเลือกตัวแปรซ้ำจากตัวแปรทั้งหมด

   ควรเลือกตัวแปรซ้ำจากกลุ่มคุณสมบัติเหล่านี้อย่างละ 1 ตัว

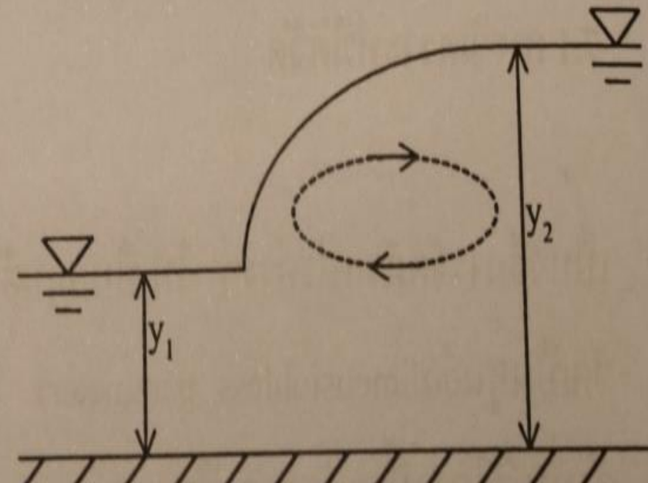
   ก) คุณสมบัติของของไหลเช่น ρ(ความหนาแน่น), μ(ความหนืด), σ(ความตึงผิว)

   ข) ลักษณะทางเรขาคณิต เช่น D(เส้นผ่าศูนย์กลาง), L(ความยาว), A(พื้นที่), $\forall$(ปริมาตร)

   ค) คุณสมบัติจลนศาสตร์หรือพลศาสตร์ เช่น V(ความเร็ว), a(ความเร่ง), F(แรง), p(ความดัน), Q(อัตราการไหล)

   ตัวแปรซ้ำที่ใช้มากได้แก่ ρ, V, L ซึ่งปรากฏในเทอมของแรงเฉื่อย(inertia force) คือ $F_i = Ma = \rho V^2 L^2$
5. จัดกลุ่มตัวแปรจำนวน n-m กลุ่ม แล้วทำการหามิติของแต่ละตัวแปรในแต่ละกลุ่มที่ทำให้เป็นกลุ่มตัวแปรที่ไม่มีมิติวัด

Ex.7-1 น้ำกระโดดเกิดขึ้นในทางน้ำเปิดดังแสดงในรูป มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับตัวแปรต่างๆ คือ ความลึกการไหลก่อนกระโดด(y_1) ความลึกการไหลหลังกระโดด(y_2) อัตราการไหลต่อหน่วยความกว้าง(q) ความเร่งเนื่องจากดึงดูดของโลก(g) ความหนาแน่นของน้ำ(ρ) และ ความหนืดพลศาสตร์ของน้ำ(μ) ให้หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านี้ในรูปของกลุ่มตัวแปรความสัมพันธ์ที่ไม่มีมิติ(dimensionless parameter)



วิธีทำ <u>ขั้นตอนที่ 1</u> ระบุตัวแปรต่างๆ y_1 y_2 q ρ g μ

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เลือกระบบมิติวัด MLt

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> กำหนดมิติวัดในแต่ละตัวแปร

y_1	y_2	q	ρ	g	μ
L	L	$\frac{L^2}{t}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{L}{t^2}$	$\frac{M}{Lt}$

ขั้นตอนที่ 3 กำหนดมิติวัดในแต่ละตัวแปร

y_1	y_2	q	ρ	g	μ
L	L	$\frac{L^2}{t}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{L}{t^2}$	$\frac{M}{Lt}$

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดตัวแปรซ้ำ $\rho \quad y_1 \quad q$

ขั้นตอนที่ 5 จัดกลุ่มตัวแปร หรือ Π

$$\Pi_1 = \rho^{a1} y_1^{b1} q^{c1} y_2$$

$$\Pi_2 = \rho^{a2} y_1^{b2} q^{c2} g$$

$$\Pi_3 = \rho^{a3} y_1^{b3} q^{c3} \mu$$

หามิติของตัวแปรในแต่ละ Π ให้เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติ

พิจารณา Π_1

$$M^0 L^0 t^0 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a1} L^{b1} \left(\frac{L^2}{t}\right)^{c1} L$$

มิติของ M : $\quad 0 = a_1 \qquad$ จะได้ $a_1 = 0$

มิติของ L : $\quad 0 = -3a_1 + b_1 + 2c_1 + 1 \qquad$ จะได้ $b_1 = -1$

มิติของ t : $\quad 0 = -c_1 \qquad$ จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้น $\Pi_1 = \rho^0 y_1^{-1} q^0 y_2 = \dfrac{y_2}{y_1}$

หรือกำหนดอีกรูปแบบหนึ่งคือ $\prod_2 = \frac{q^2}{y_1^3 g} = Fr_1^2$ (Froude number)

พิจารณา Π_3

$$M^0 L^0 t^0 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a3} L^{b3} \left(\frac{L^2}{t}\right)^{c3} \frac{M}{Lt}$$

มิติของ M : $0 = a_3 + 1$ จะได้ $a_3 = -1$

มิติของ L : $0 = -3a_3 + b_3 + 2c_3 - 1$ จะได้ $b_3 = 0$

มิติของ t : $0 = -c_3 - 1$ จะได้ $c_3 = -1$

ดังนั้น $\Pi_3 = \rho^{-1} y_1^{0} q^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho q} = \frac{\nu}{q} = \frac{\nu}{Vy}$

หรือกำหนดอีกรูปแบบหนึ่งคือ $\prod_3 = \frac{q}{\nu} = Re$ (Reynolds number)

สมการความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปรต่างๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

หรือ $\frac{y_2}{y_1} = \phi\left(\frac{q^2}{y_1^3 g}, \frac{q}{\nu}\right) = \phi\left(Fr_1^2, Re\right)$

เปรียบเทียบกับสมการของน้ำกระโดด

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1+8Fr_1^2}\right] = \phi\left(Fr_1^2\right)$$

มิติของ M : $0 = a_3 + 1$ จะได้ $a_3 = -1$

มิติของ L : $0 = -3a_3 + b_3 + 2c_3 - 1$ จะได้ $b_3 = 0$

มิติของ t : $0 = -c_3 - 1$ จะได้ $c_3 = -1$

ดังนั้น $\Pi_3 = \rho^{-1} y_1^{0} q^{-1} \mu = \dfrac{\mu}{\rho q} = \dfrac{\nu}{q} = \dfrac{\nu}{Vy}$

หรือกำหนดอีกรูปแบบหนึ่งคือ $\Pi_3 = \dfrac{q}{\nu} =$ Re (Reynolds number)

สมการความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปรต่างๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

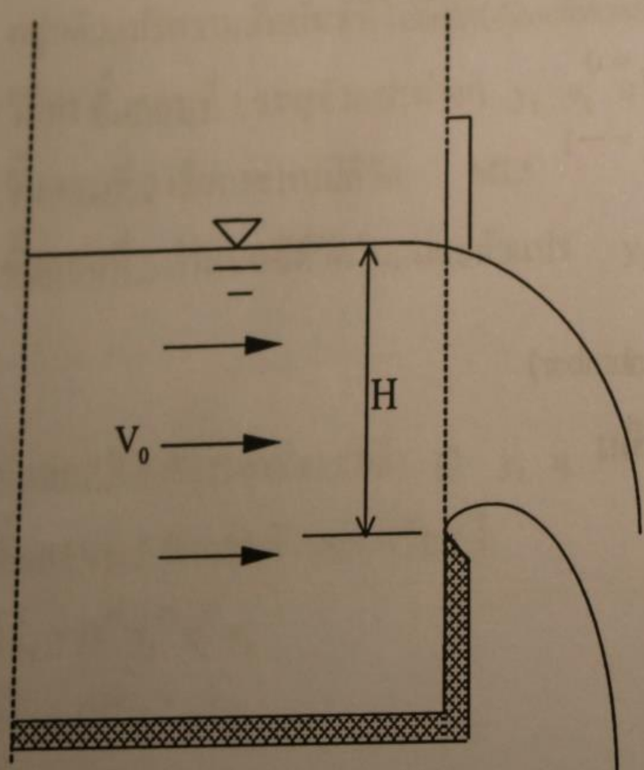
หรือ $\dfrac{y_2}{y_1} = \phi\left(\dfrac{q^2}{y_1^3 g}, \dfrac{q}{\nu}\right) = \phi\left(Fr_1^2, Re\right)$

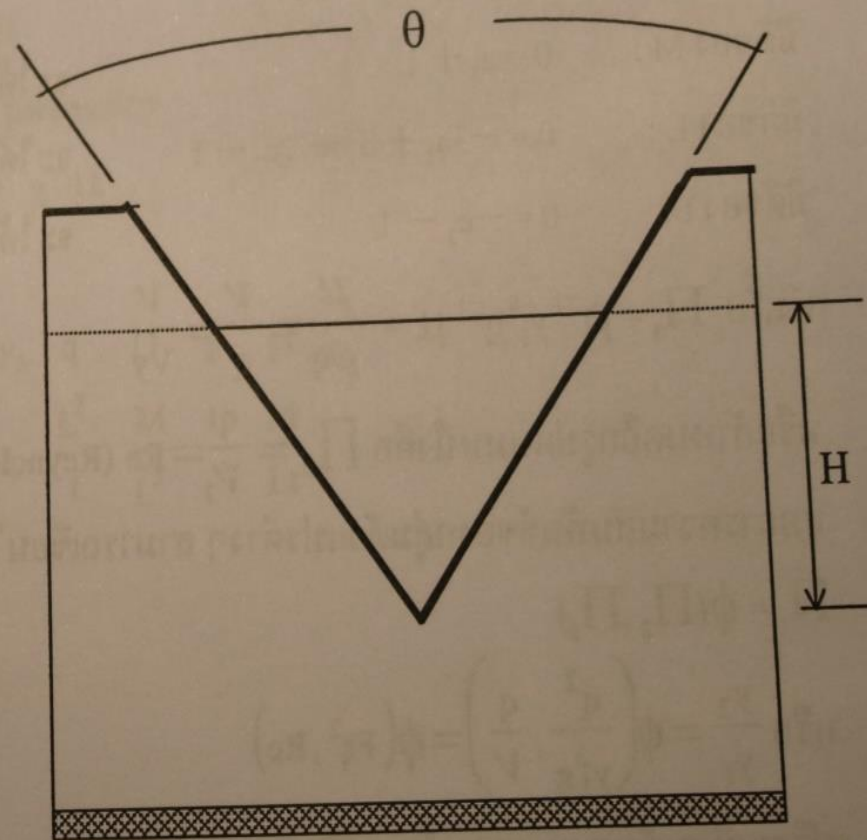
เปรียบเทียบกับสมการของน้ำกระโดด

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}\right] = \phi\left(Fr_1^2\right)$$

จะเห็นว่า y_2/y_1 ขึ้นอยู่กับ Fr_1^2 เพียงอย่างเดียวโดยไม่ขึ้นกับ Re เนื่องจากความฝืดที่เกิดจากความหนืดมีผลน้อย มากในการเกิดน้ำกระโดด นั่นคือ Re มีผลน้อยมากต่อสมการของน้ำกระโดด

Ex.7-2 จากการศึกษาการไหลของน้ำผ่านฝายหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมหรือรูปตัววี(Triangular or V-notch Weir) พบว่าอัตราการไหลขึ้นอยู่กับ มุมของร่องสันฝาย(θ) ความลึกของน้ำเหนือร่องสันฝาย (H) ความเร่งเนื่องจากดึงดูดของโลก(g) ความเร็วการไหลก่อนผ่านฝาย (V_0) ให้หาสมการของอัตราการไหลผ่านฝายดังกล่าวโดยหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านี้ในรูปของกลุ่มตัวแปรความสัมพันธ์ที่ไม่มีมิติ(dimensionless parameter)





มิติของ L : $0 = a_1 + b_1 + 3$ จะได้ $a_1 = -\frac{5}{2}$

มิติของ t : $0 = -2b_1 - 1$ จะได้ $b_1 = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\Pi_1 = \dfrac{Q}{\sqrt{g}H^{5/2}}$

พิจารณา Π_2

$$M^0L^0t^0 = L^{a2}\left(\frac{L}{t^2}\right)^{b2}\frac{L}{t}$$

มิติของ L : $0 = a_2 + b_2 + 1$ จะได้ $a_2 = -\frac{1}{2}$

มิติของ t : $0 = -b_2 - 1$ จะได้ $b_2 = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\Pi_2 = \dfrac{V_0}{\sqrt{gH}}$

สมการความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปรต่างๆ สามารถเขียนได้เป็น

$\Pi = \phi(\Pi, \Pi)$

มิติของ t: $0 = -b_2 - 1$ จะได้ $b_2 = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\Pi_2 = \frac{V_0}{\sqrt{gH}}$

สมการความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปรต่างๆ สามารถเขียนได้เป็น

$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$

หรือ $\frac{Q}{\sqrt{g}H^{5/2}} = \phi\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \theta\right)$

หรือ $Q = \sqrt{g}H^{5/2}\phi\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \theta\right)$

เปรียบเทียบกับสมการอัตราการไหลของน้ำผ่านฝายสามเหลี่ยม

$$Q = C_d \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan\frac{\theta}{2}H^{5/2} = \sqrt{g}H^{5/2}\left(C_d \frac{8}{15}\sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

จากการศึกษาพบว่า C_d ขึ้นอยู่กับ θ มากที่สุด

1. การวิเคราะห์มิติเชิงหน่วย (Dimensional Analysis)

ใช้ในการแก้ปัญหาการจัดผลการทดลอง หรือวิเคราะห์ผลที่ได้ โดยเฉพาะในเรื่อง Model การวิเคราะห์มิติเชิงหน่วยจึงเป็นคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับมิติเชิงปริมาณของตัวแปรที่ใช้ โดยหลักแล้วตัวแปรทางชลศาสตร์สามารถจะปรับและแปลงเปลี่ยนเป็นตัวแปรพื้นฐาน 3 ตัว คือ F(force) หรือ M(mass) L(length) และ T(time)

ใช้ในการแก้ปัญหาการจัดผลการทดลอง หรือวิเคราะห์ผลที่ได้ โดยเฉพาะในเรื่อง Model การวิเคราะห์มิติเชิงหน่วยจึงเป็นคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับมิติเชิงปริมาณของตัวแปรที่ใช้ โดยหลักแล้วตัวแปรทางชลศาสตร์สามารถจะปรับและแปลงเปลี่ยนเป็นตัวแปรพื้นฐาน 3 ตัว คือ F(force) หรือ M(mass) L(length) และ T(time)

การใช้ประโยชน์ 1. แปลงหน่วย

2. ตั้งสมการ

3. ลดตัวแปรในการทำทดลอง

4. ตั้งตัวแปรหลักในการทำทดลองแบบจำลอง

จงพิสูจน์ว่า แรงเหวี่ยง (centrifugal force,F) ของอนุภาคของไหลที่มีมวล M ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง V ตามแนวรัศมี R

คือ $$F = \frac{C M V^2}{r}$$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่

$$F = f(M, V, r)$$

$$\therefore \quad F = C M^a V^b R^c$$ ตั้งสมการ

$$M^1 L^1 T^{-2} = (M^0 L^0 T^0)(M^1)^a (L^1 T^{-1})^b (L^1)^c$$

$$= (M \; L \; T)(M)(L \; T)(L)$$

ค่ายกกำลังของมิติเดียวกันด้านซ้ายและด้านขวาต้องเท่ากันคือ

$$\left.\begin{array}{lll} \text{มิติของ } M & 1 = 0 + a \\ L & 1 = 0 + b + c \\ T & -2 = 0 + b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{array}$$

ค่ายกกำลังของมิติเดียวกันด้านซ้ายและด้านขวาต้องเท่ากันคือ

มิติของ

$$\left.\begin{array}{lrcl} M & 1 & = & 0+a \\ L & 1 & = & 0+b+c \\ T & -2 & = & 0+b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{array}$$

จะได้สูตร $F = \dfrac{C\,MV^2}{r}$

ถ้าความเร็วคลื่นน้ำตื้น V ขึ้นอยู่กับความลึกของน้ำ D และความเร่ง เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g จงหาสมการของความเร็วคลื่นน้ำตื้น

$$V = f(D,g)$$

$$V = C\,D^a g^b$$

$$LT^{-1} = [M^0 L^0 T^0]\,[L]^a\,[LT]^b$$

$$LT^{-1} = M^0 L^{0+a+b} T^{0+2b}$$

$]$

จะได้สูตร $F = \frac{C M V^2}{r}$

ความเร็วคลื่นน้ำตื้น V ขึ้นอยู่กับความลึกของน้ำ D และความเร่ง เนื่องจากแรงโน้มถ่วง
ของโลก g จงหาสมการของความเร็วคลื่นน้ำตื้น

$$V = f(D,g)$$

$$V = C D^{a} g^{b}$$

$$LT^{-1} = [M^{0} L^{0} T^{0}] [L]^{a} [LT]^{b}$$

$$LT^{-1} = M^{0} L^{0+a+b} T^{0+2b}$$

$$1 = 0+a+b$$

$$-1 = -2b \qquad \therefore \quad b = 1/2$$

$$a = 1/2$$

$$V = C\sqrt{gD} \quad ....*$$

2.1 ความจำเป็นที่ต้องใช้

2.2 ข้อจำกัด

2.3 ขนาด

2.4 ชนิด

e Model or distorted Model / Model and proto type relations

e Model : ทดแทนคุณสมบัติหลักของตัวแปร โดยลด/เพิ่มขนาดทางเรขาคณิต

2.4 ชนิด

True Model or distorted Model / Model and proto type relations

True Model : ทดแทนคุณสมบัติหลักของตัวแปร โดยลด/เพิ่มขนาดทางเรขาคณิต

(undistorted) (geometrically similar)

Distorted Model : satisty design restriction (kinematic and dynamic similitude)

Model - proto type comparisons have clearly shown that the correcpondence of behaviour is often well beyond limitations. --> many structures designed from model tests.

True Model or distorted Model / Model and proto type relations

True Model : ทดแทนคุณสมบัติหลักของตัวแปร โดยลด/เพิ่มขนาดทางเรขาคณิต

(undistorted) (geometrically similar)

Distorted Model : satisty design restriction (kinematic and dynamic similitude)

Model - proto type comparisons have clearly shown that the correcpondence of behaviour is often well beyond limitations. --> many structures designed from model tests.

อย่างการใช้แบบจำลอง เช่น การออกแบบสะพาน, คลอง, เขื่อน, spillway

ทฤษฎีความคล้ายคลึงกันทางชลศาสตร์

8.1 Geometric Similitude□

$$\frac{L\ \text{model}}{L\ \text{proto type}} = L\ \text{ratio} \quad \text{or} \quad \frac{L_m}{L_p} = L_r$$

$$\frac{A\ \text{model}}{A\ \text{proto type}} = \frac{L^2\ \text{model}}{L^2\ \text{proto type}} = L^2_{\text{ratio}} = L_r^2$$

8.2 Kinematic Similitude□

conditions-เชิงจลน์

$$\frac{A\ model}{A\ proto\ type} = \frac{L^2\ model}{L^2\ proto\ type} = L^2_{ratio} = L^2$$

3.2 Kinematic Similitude □

conditions-เชิงจลน์

1. Paths of homogeous moving particles are geometrically similar

2. Ratio of velocities of homologeous particles are equal

$$\text{velocity} = \frac{Vm}{Vp} = \frac{Lm/Tm}{Lp/Tr} = \frac{Lm}{Lp} \div \frac{Tm}{Tp} = \frac{Lr}{Tr}$$

$$\text{Acceleration} = \frac{am}{ap} = \frac{Lm/Tm^2}{Lp/Tp^2} = \frac{Lm}{Lp} \div \frac{Tm^2}{Tp^2} = \frac{Lr}{Tr^2}$$

$$\text{velocity} = \frac{Vm}{Vp} = \frac{Lm/Tm}{Lp/Tr} = \frac{Lm}{Lp} \div \frac{Tm}{Tp} = \frac{Lr}{Tr}$$

$$\text{Acceleration} = \frac{am}{ap} = \frac{Lm/Tm^2}{Lp/Tp^2} = \frac{Lm}{Lp} \div \frac{Tm^2}{Tp^2} = \frac{Lr}{Tr^2}$$

$$\text{Discharge} = \frac{Qm}{Qp} = \frac{Lm^3/Tm}{Lp^3/Tp} = \frac{Lm^3}{Lp^3} \div \frac{Tm}{Tp} = \frac{Lr^3}{Tr}$$

เช่น ให้ $\frac{Vm}{Vp} = \frac{1}{10} = \frac{Lr}{Tr}$ จะได้ $Lr = \frac{1}{10}$ $Tr = 1$

หรือ $Lr = 1$ $Tr = 10$

8.3 Dynamic Similitude (พลศาสตร์)

exists between geometrically and kinematically similar systems if the ratio of all homogeneous forces in model and prototype are the same

$$\frac{\sum F_m}{\sum F_p} = \frac{\sum \text{forces}(\overset{F_v}{\text{viscous}}+\overset{F_r}{\text{pressure}}+\overset{F_g}{\text{gravity}}+\overset{F_s}{\text{surface ten.}}+\overset{F_e}{\text{elasticity}})_m}{\sum \text{forces}(\quad)_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

น.ย. กรณีแรงเฉื่อย $F = \frac{\text{force model}}{\text{force prototype}} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m L_m^3}{\rho_p L_p^3} \times \frac{L_r}{T_r^2}$

$$= \rho_r L_r^2 \left(\frac{L_r}{T_r}\right)^2$$

$$\begin{array}{ccccc} Fv & Fr & Fg & Fs & Fe \end{array}$$

$$\frac{\sum Fm}{\sum Fp} = \frac{\sum \text{forces (viscous+pressure+gravity+surface ten.+elasticity)}_m}{\sum \text{forces (}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{)}_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

ต.ย. กรณีแรงเฉื่อย $F = \frac{\text{force model}}{\text{force prototype}} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m L_m^3}{\rho_p L_p^3} \times \frac{L_r}{T_r^2}$

$$= \rho_r L_r^2 \left(\frac{L_r}{T_r}\right)^2$$

จะได้ $F_r = \rho_r L_r^2 V_r^2 = \rho_r A_r V_r^2 = \frac{\rho_r L_r^4}{T_r^2}$

ต.ย. กำหนดให้ $\rho_r = 1$, $T_r = 1$ จะได้ $F_r = \frac{1 \text{x} L_r^4}{1}$

ถ้าให้ $F_r = \frac{1}{10}$ $F_r = \frac{1}{10} = \frac{1 \text{x} L_r^4}{1}$ จะได้ $L_r = \frac{1}{\sqrt{10}}$

พารามิเตอร์ไร้หน่วยที่สำคัญ

รามิเตอร์ไร้หน่วยที่สำคัญในงานชลศาสตร์ เป็นอัตราส่วนของแรงเฉื่อยต่อแรงต่าง ๆ

1. **Euler number**
   ความดันของของไหล

$$= \frac{\text{Inertia}}{\text{pressure}} = \frac{M_a}{PA} = \frac{\rho L^3 \, L/T^2}{PL^2}$$

$$= \frac{\rho L^4 (V^2/L^2)}{pL^2} = \frac{\rho L^2 V^2}{pL^2} = \frac{\rho V^2}{p}$$

2. **Reynolds no**
   turbulent/laminar

$$= \frac{\text{Inertia}}{\text{viscous}} = \frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu \frac{du}{dy} A} = \frac{PL^2 V^2}{\mu \left[\frac{V}{L}\right] L^2}$$

$$= \frac{pVL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

3. **Froude no** $= \dfrac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}} = \dfrac{Ma}{Mg} = \dfrac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \dfrac{V^2}{Lg}$

แรงดึงดูดของโลก

critical flow

super/sub $\quad Fr = V/\sqrt{gL}$

4. **Cauchy no** $= \dfrac{\text{Inertia}}{\text{Elasticity}} = \dfrac{Ma}{EA} = \dfrac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \dfrac{\rho V^2}{E}$

compressible flow

(Much no. $= \dfrac{v}{c} = \sqrt{\text{cauchy no}}$)

5. **Weber no** $= \dfrac{\text{Inertia}}{\text{surface tension}} = \dfrac{Ma}{\sigma L} = \dfrac{\rho L^2 V^2}{E L^2} = \dfrac{\rho L V^2}{\sigma}$

การสร้างคลื่น,หยดน้ำ

ระบบการไหลปรกติมักจะมีตัวแฟกเตอร์หลัก 1-2 ในเวลาเดียวกัน

ne Ratios for flow patterns

$$Tr = \frac{Lr^2}{\nu r}$$ for viscosity

$$Tr = \sqrt{\frac{Lr}{g_r}}$$ for gravity

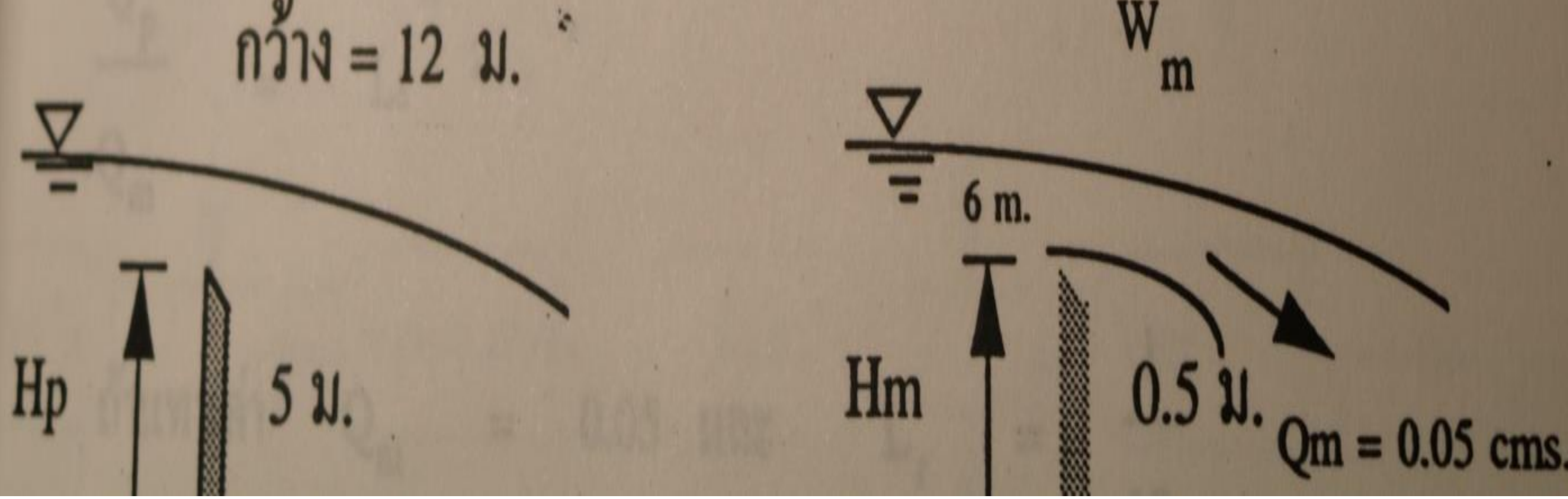
$$Tr = \sqrt{\frac{Lr^3 Pr}{\sigma r}}$$ for surface tension

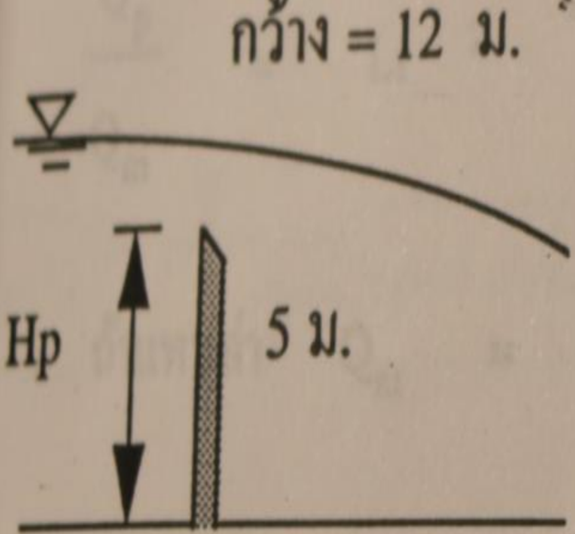
$$Tr = \frac{Lr}{\sqrt{Er/\rho_r}}$$ for elasticity

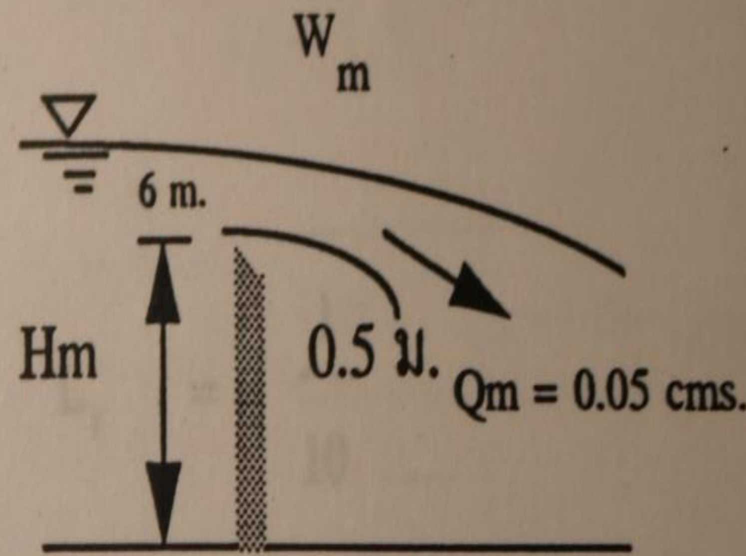
ฝายสันคม รูปสี่เหลี่ยมเป็นของจริงสูง 5 เมตร กว้าง 12 เมตร

ก) ถ้าต้องการสร้างแบบจำลองฝายมาตราส่วน 1:10

ข) ถ้าผลการทดลองแบบจำลองพบว่า เมื่อน้ำเหนือสันฝายสูง 6 เมตร วัดอัตราการไหลได้ 0.05 ซม. จงหาอัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความกว้างของฝายที่สร้างแล้ว







ก) $L_r = \dfrac{H_m}{H_p} \qquad \dfrac{1}{10} = \dfrac{H_m}{5} \qquad H_m = 0.5 \text{ m}$

$L_r = \dfrac{W_m}{W_p} \qquad \dfrac{1}{10} = \dfrac{W_m}{12} \qquad W_m = 1.2 \text{ m}$

ข) การทดลอง dynamic similitude จะกำหนดให้ค่า Froude no. เท่ากัน

$$\because \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

$$Fr_m = Fr_p = \frac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}}$$

$$\because \quad g_m = g_p \quad \therefore \quad \frac{V_p}{V_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = L_r^{-\frac{1}{2}}$$

$$\because \quad Q = VA = L^2 V$$

$$V_m = \frac{Q_m}{L_m^2}$$

$$V_p = \frac{Q_p}{L_p^2}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{V_p L_p^2}{V_m L_m^2} = \frac{V_p}{V_m} Lr^{-2}$$

$$= Lr^{-\frac{1}{2}} Lr^{-2}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = Lr^{-\frac{5}{2}}$$

ถ้าแทนค่า $Q_m = 0.05$ และ $L_r = \dfrac{1}{10}$

$$Q_p = Q_m L_r^{-\frac{5}{2}}$$

ถ้าแทนค่า $Q_m = 0.05$ และ $L_r = \dfrac{1}{10}$

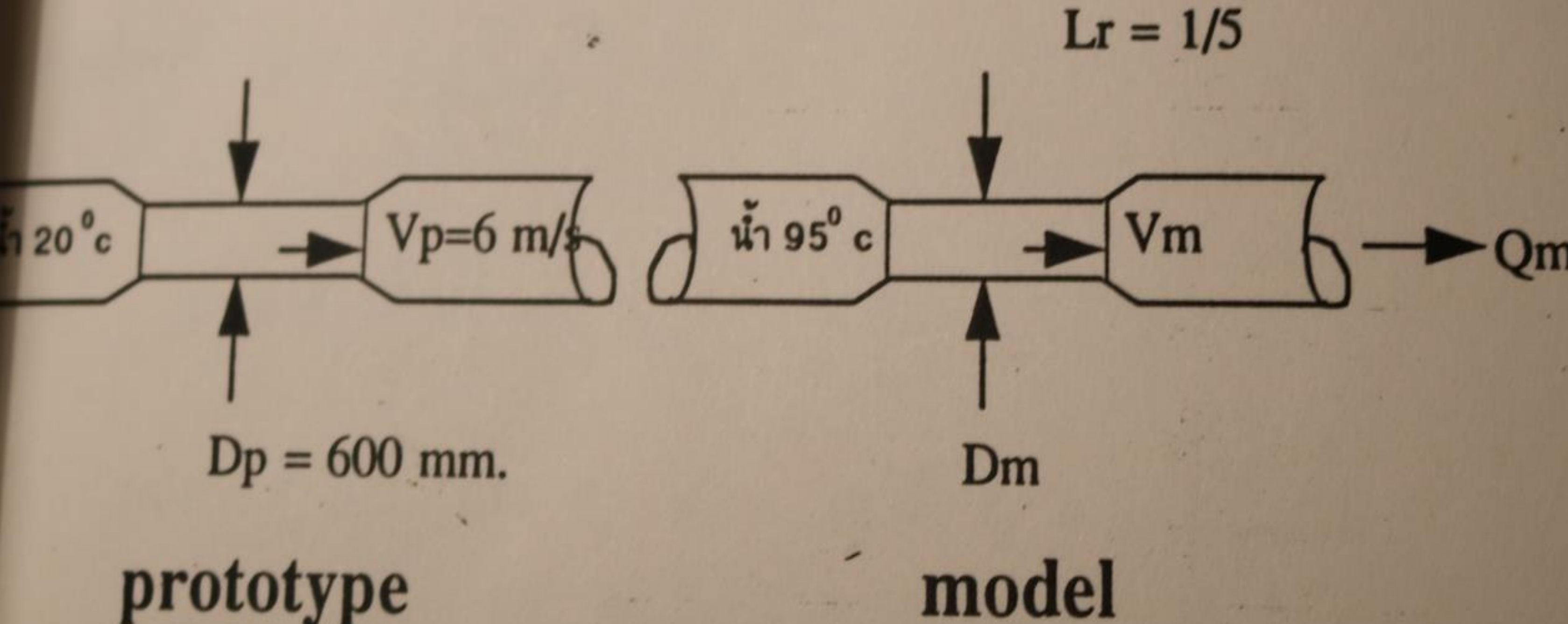
$$Q_p = Q_m L_r^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{0.05}{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

หรือ $= 15.81$ cms

$$Q_p = \frac{15.81}{12} = 1.32 \text{ cms / m}$$

แบบจำลอง Venturi 1:5 ของจริงมีเส้นผ่าศูนย์กลางของคอ 600 มม. เมื่อน้ำที่มีอุณหภูมิ 20 ºC ไหลผ่าน ทำให้ความเร็วที่คอมีถึง 6 m/s จงหาว่า ถ้าปล่อยน้ำที่มีอุณหภูมิ 95 ºC ไหลผ่านแบบจำลองของเวนจูรี จะได้อัตราการไหลเท่าใด จึงทำให้สภาพการไหลเดียวกัน



Given น้ำ 90 ºc $\nu_p = 1.007 \times 10^{-6}$ m/s

น้ำ 95 ºc $\nu_m = 3.11 \times 10^{-7}$ m/s

Given น้ำ 90 °c $\nu_p = 1.007 \times 10^{-6}$ m/s

น้ำ 95 °c $\nu_m = 3.11 \times 10^{-7}$ m/s

วิธีทำ i) หาค่าเส้นผ่าศูนย์กลางของแบบจำลอง

$$Dm = \frac{Lr}{5}Dp = 1 \times (600) = 120 \text{ มม.}$$

ii) การไหลในท่อ สภาพการไหลเหมือนกัน Reynlod No. เท่ากัน

$$(Re)_m = (Re)_p$$

$$\frac{VmDm}{\nu_m} = \frac{VpDp}{\nu_p}$$

$$\frac{Vm(120\text{ mm})}{3.11 \times 10^{-7}} = \frac{6\ (600\text{mm})}{1.007 \times 10^{-6}}$$

$$Vm = 9.27 \quad \text{m/s}$$

$$Qm = VmAm$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.12)^2 \times 9.27$$

จะได้อัตราการไหล = 0.10 cms

uckingham Theorem

Ex.

ต.ย. กรณี

$$\text{แรงเฉื่อย } F = \frac{\text{force model}}{\text{force proto type}} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{P_m L_m^3}{P_p L_p^3} \frac{L}{T_r^2}$$

$$\text{การเคลื่อนที่} = P_r L_r^2 \left(\frac{L_r}{T_r}\right)^2$$

$$F_r = P_r L_r^2 V_r^2 = P_r A_r V_r^2 = \frac{P_r L_r^4}{T_r^2}$$

ถ้ากำหนดให้ $P_r = 1$ และ $T_r = 1$ จะได้ $F_r = \frac{1 \times L_r^4}{1}$

และให้ $F_r = \frac{1}{10}$ จะได้ $\frac{1}{10} = \frac{1 \times L_r^4}{1}$

$$L_r = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$$

Hydraulics

Homework Lesson 7 (Similarity & Dimensional Analysis)

อัตราส่วน.

1. The pressure drop in a Venturi meter varies only with fluid density, velocity of approach and the diameter ratio of the meter. Venturi meter 1 in water at 20°C shows a 6 kPa drop when the approach velocity is 5 m/s. Meter 2, geometrically similar to 1, is used in 1/6 m^3/s flow of benzene (ρ = 680 kg/m^3). Find the upstream pipe diameter thai will yield 16 kPa drop in meter 2.

metr 1 ใช้ $P_1 = 6$ kPa

$V_1 = 5$ m/s

Solution Lesson 7 (Similarity & Dimensional Analysis)

1.

$$\Delta P = f(\rho, V, D/d) \quad , \quad \Delta P/(\rho v^2) = g(D/d)$$

$$(\Delta P/(\rho v^2))_1 = (\Delta P/(\rho v^2))_2$$

$$(\Delta P/(\rho v^2))_1 = \frac{6 \times 1000}{998 \times 5^2} = 0.2405 \quad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$(\Delta P/(\rho v^2))_2 = \frac{16 \times 1000}{650 \times V^2} = \frac{23.53}{V^2} \quad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

$$(1) = (2) \qquad V = 9.891 \quad \text{m/s}$$

$$\theta = AV \; ; \qquad \frac{1}{6} = \frac{(\pi \, Dp^2)}{4}(9.891)$$

$$Dp = 0.146 \quad \text{m.}$$

$$= 146 \quad \text{mm.}$$

2. A ship 650 ft long is to operate at a speed of 20 mph in ocean water where kinemetic viscosity is 0.00001265 ft^2/s. What should be the kinemetic viscosity of a fluid cesed with an 11-ft model so that both the Reynold number and Froude number would be the same.

2.

$$(Re)_m = (Re)_p \qquad Re = \frac{DV}{\nu}$$

$$(Fe)_m = (Fe)_p \qquad Fe = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

ให้ r เป็นอัตราส่วนระหว่าง prototype to model

$$\frac{L_r V_r}{\nu_r} = 1$$

$$\frac{V_r}{\sqrt{g_r L_r}} = 1$$

$$\frac{L_r V_r}{\nu_r} - \frac{V_r}{\sqrt{g_r L_r}}$$

$$g_r = 1, \quad L_r = 650/11 = 59.11$$

$$\frac{59.11\, V_r}{\nu_r} - \frac{V_r}{\sqrt{1 \times 59.11}}$$

$$\nu_r = 454.3$$

$$\nu_m = \frac{0.00001261}{454.3} = 2.78 \times 10^{-8} \ ft^2/sec.$$

(impossibly small)

3. The buoyant force F_b on a body is thought to depend upon the volumn submerged V and the gravitational body force acting on the fluid. Determine the form of the buoyant force equation.