

Hydraulics 1 (2112-346)

Lecture Note (L 6)

Sucharit Koontanakulvong
Water Resources Engineering

ห้อง ๓๓๐๖
January 2017

เนื้อหา

- ความเสถียรของวัตถุลอย/จม

บทที่ 6 เสถียรภาพของวัตถุลอย/จม

บทนี้จะอธิบายทฤษฎีเสถียรภาพของวัตถุลอย/ จมในของเหลว

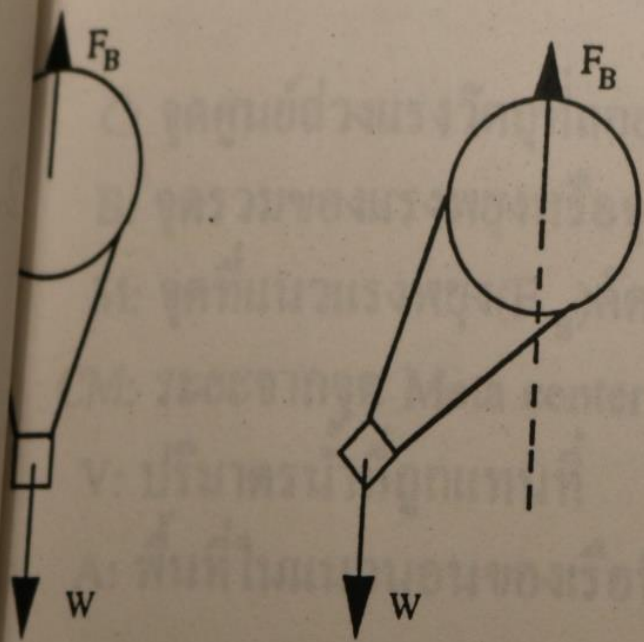
เนื้อหา

1. เสถียรภาพของวัตถุลอย/ จม แบบสถิตย์
2. การคำนวณหาความสูงเมตตา และจุดเมตตาเซนเตอร์
3. เสถียรภาพแบบล้มพัง

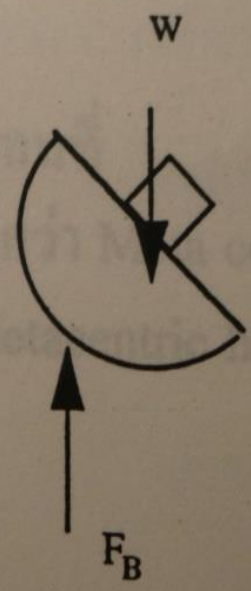
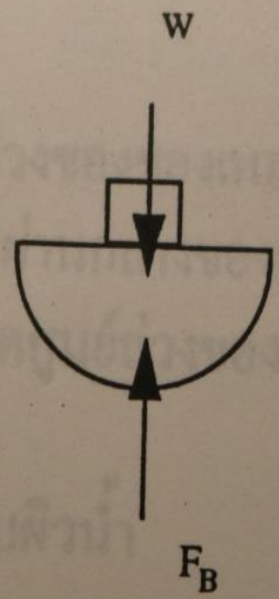
เสถียรภาพของวัตถุที่ลอยหรือจม

เสถียรภาพของวัตถุที่ลอยหรือจมนั้น ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของตำแหน่งของแรงพยุง และตำแหน่งของน้ำหนักของวัตถุ แรงพยุงจะกระทำผ่านจุดศูนย์ถ่วงของของเหลวที่ถูกแทนที่ ส่วนน้ำหนักของวัตถุจะกระทำผ่านจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุ $\therefore$ การที่วัตถุที่ลอยหรือจมนจะมีเสถียรภาพหรือไม่จะกำหนดได้จากการดูว่า โมเมนต์ที่ทำให้คืนสภาพ กับโมเมนต์ที่ทำให้พลิกคว่ำ โมเมนต์ทั้งสองประเภทนี้ โมเมนต์ใดจะเกิดและขยายตัวในขณะที่จุดศูนย์ถ่วง และจุดศูนย์รวมแรงพยุงเคลื่อนออกนอกแนวตั้ง ซึ่งโดยปกติจุดทั้งสองจะอยู่ในแนวตั้งเส้นเดียวกัน

เล็กกว่า โมเมนต์ทั้งสองประเภทนี้ โมเมนต์ใดจะเกิดและขยายตัวในขณะที่จุดศูนย์กลาง
 และจุดศูนย์รวมแรงพยางค์เลื่อนออกนอกแนวตั้ง ซึ่งโดยปกติจุดทั้งสองจะอยู่ในแนวตั้งเส้น
 ไขว่กัน

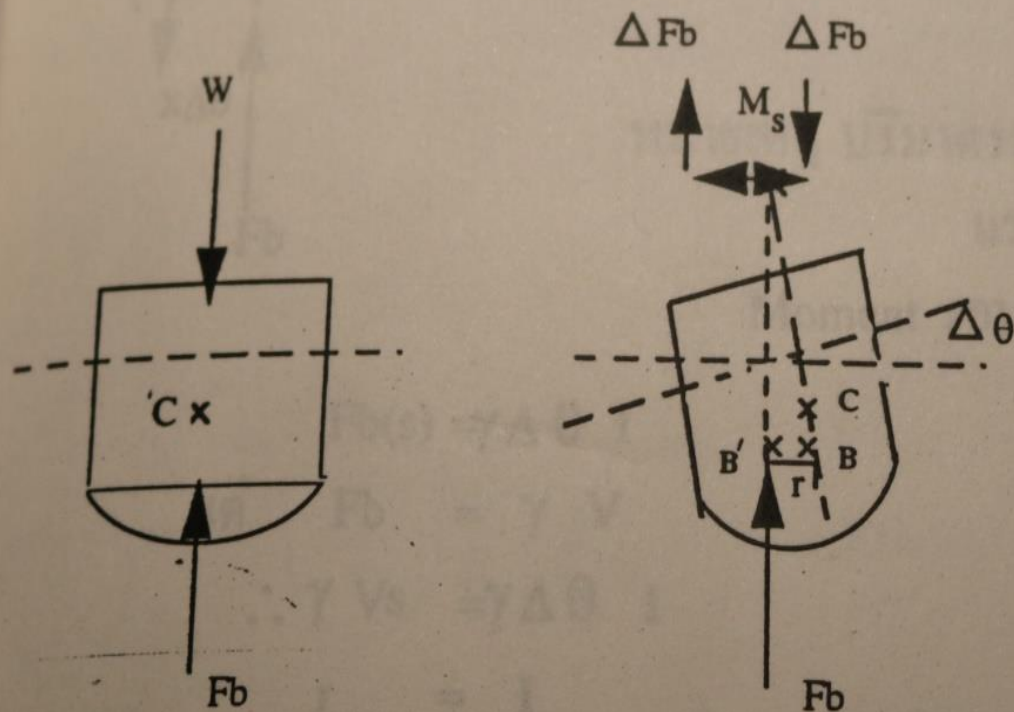


บอลกลิ้ง



เรือ

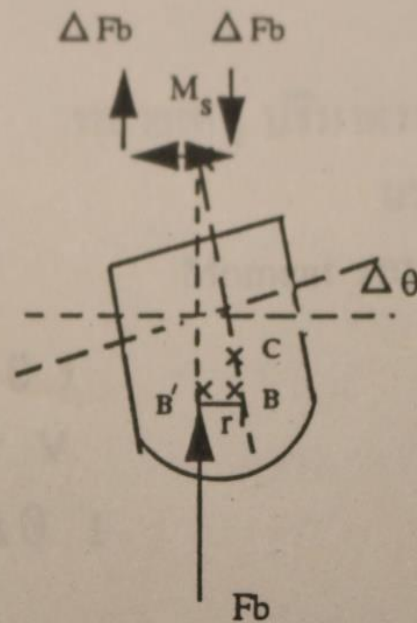
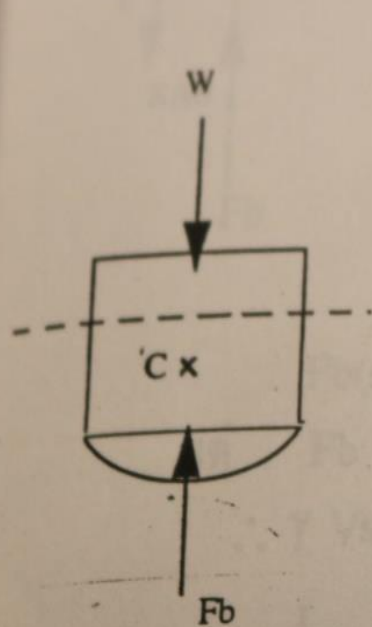
การคำนวณหาความสูงเมตตา และจุดเมตตาเซนเตอร์



take moment at B

$$\Delta F_b(s) = F_b(r)$$

C: จุดศูนย์ถ่วงแรงวัตถุที่ลอยน้ำ



take moment at B

$$\Delta Fb(s) = Fb(r)$$

C: จุดศูนย์ถ่วงแรงวัตถุที่ลอยน้ำ

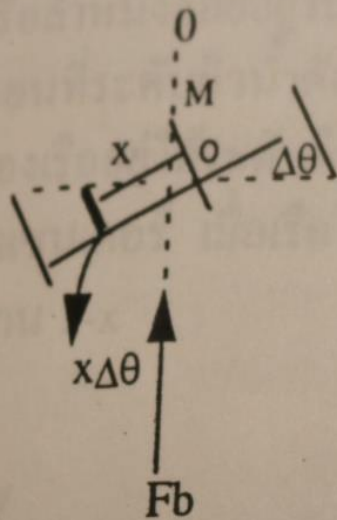
B: จุดรวมของแรงพยุงหรือจุดศูนย์ถ่วงของของเหลวที่ถูกแทนที่

M: จุดที่แนวแรงพยุง(F_B) ตัดกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวัตถุ เรียกว่า Meta center

CM: ระยะจากจุด Meta center มายังจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุ (Metacentric height)

V: ปริมาตรน้ำที่ถูกแทนที่

A: พื้นที่ในแนวนอนของเรือที่ระนาบผิวน้ำ



$$\Delta F_b(s) = \int_A x (\gamma x \Delta \theta dA)$$

$$= \gamma \Delta \theta \int_A x^2 dA$$

$$= \gamma \Delta \theta I$$

หมายเหตุ ปริมาตรเล็ก ๆ $= x \Delta \theta da$

แรงพยุ่ง $= x \Delta \theta da$

Moment รอบจุด O $= x (\gamma x \Delta \theta da)$

$$F_b(s) = \gamma \Delta \theta I$$

$$\text{แต่ } F_b = \gamma V$$

$$\therefore \gamma V_s = \gamma \Delta \theta I$$

$$\frac{r}{\Delta \theta} = \frac{I}{V}$$

$$\therefore \overline{CM} = \overline{MB} - \overline{CB}$$

เมื่อ $CM = + M$ สูงกว่า C เสถียรภาพ

เมื่อ $CM = -M$ ต่ำกว่า C ไม่เสถียรภาพ

$$F_b(s) = \gamma \Delta \theta I$$

$$\text{แต่ } F_b = \gamma V$$

$$\therefore \gamma V_s = \gamma \Delta \theta I$$

$$\frac{r}{\Delta \theta} = \frac{I}{V}$$

$$\therefore \overline{CM} = \overline{MB} - \overline{CB}$$

เมื่อ $CM = +M$ สูงกว่า C เสถียรภาพ

เมื่อ $CM = -M$ ต่ำกว่า C ไม่เสถียรภาพ

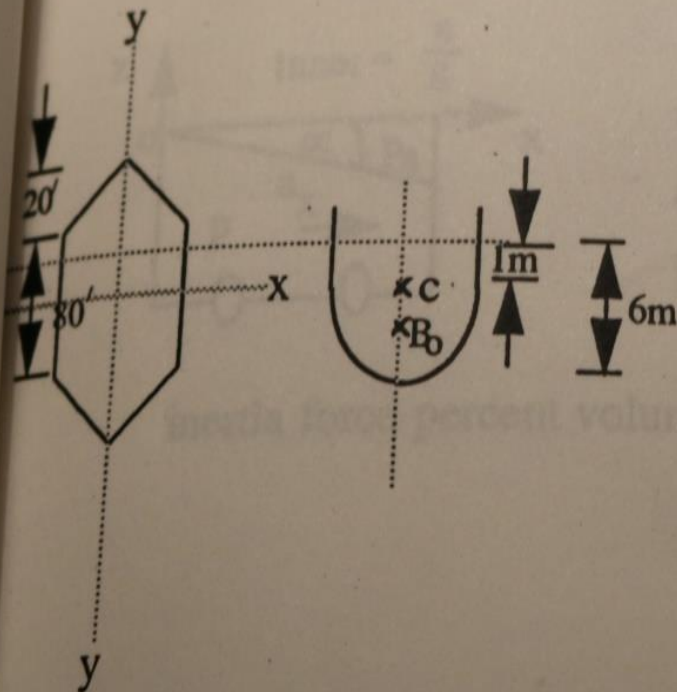
$$\text{แต่ } \overline{MB} = \gamma \Delta / \theta = I/V$$

$$\overline{CM} = \frac{I_{yy} - \overline{CB}}{V}$$

ในกรณีที่จุด C อยู่ต่ำกว่าจุด B เนื่องจากเรือบรรทุกล้นน้ำหนักมาก

$$\overline{CM} = \frac{I_{yy} + \overline{CB}}{V}$$

เรือลำหนึ่งลอยอยู่ในน้ำ ส่วนที่จมจะแทนที่น้ำ 1,000 ตัน โดยมีรูปตัดในแนวนอนที่ระดับผิวน้ำดังรูป (ก) เมื่อจุดศูนย์กลางรวมของแรงพยางค์และจุดศูนย์กลางของเรืออยู่ได้ระดับผิวน้ำ 6 และ 9 เมตร ตามลำดับ จงคำนวณหาความสูงเมตาเซนเตอร์ เมื่อเรือโคลง (รอบแกน y-y) และกระโดดขึ้นลง (พั่นคลื่น) รอบแกน x-x



$$\overline{CB}_O = 5 \text{ m} \quad V = 1,500 \text{ m}^3$$

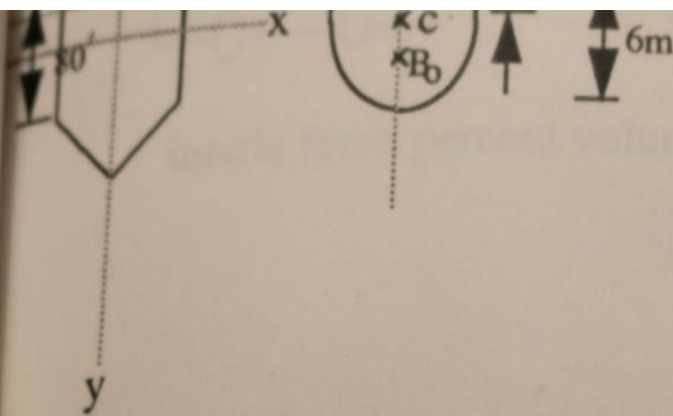
$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 80 \times 30^3 + 4 \times \frac{1}{12} \times 20 \times 15^3$$

$$= 202,500 \text{ m}^4$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \times 30 \times 80^3 + 2 \times \frac{1}{36} \times 30 \times 20^3$$

$$+ 600 \times (46.67)^2$$

$$= 2,603,000 \text{ m}^4$$



$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \frac{1}{12} \times 30 \times 80^3 + 2 \times \frac{1}{36} \times 30 \times 20^3 \\
 &\quad + 600 \times (46.67)^2 \\
 &= 2,603,000 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

เมื่อเรือโคลง ดูรูปแทน y-y จุด C อยู่เหนือจุด B

$$\overline{CM} = \frac{I_{yy}}{V} - \overline{CB}_0 = \frac{202,500}{1,000} - 5 = 197.5 \text{ m}$$

เมื่อเรือกระโดดขึ้นลง (พีนคลื่น) รอบแกน x-x

$$\overline{CM} = \frac{I_{xx}}{V} - \overline{CB}_0 = \frac{2,603,000}{1,000} - 5 = 2,598 \text{ m}$$

เสถียรภาพแบบสัมพัทธ์ (Relative static)

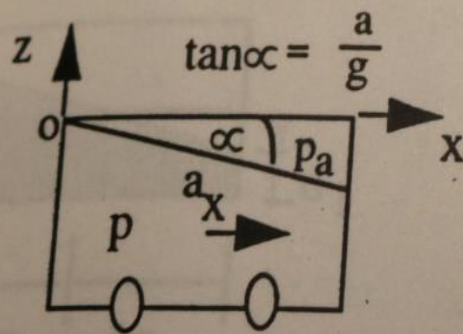
กรณีของของไหลที่มีอัตราเร่ง

เมื่อภาชนะที่บรรจุของไหลมีการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งคงที่ ทำให้ความดันภายในอนุภาคของของไหลที่ตำแหน่งต่าง ๆ เปลี่ยนไปจากสภาพที่เคยหยุดนิ่ง ของไหลเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง a ในทิศทางที่ทำมุม θ กับแกน x

3.1) Uniform Translational Acceleration

D'Alembert's principal

a dynamic system can be treated as a static system provided the effects of acceleration are accounted for by the addition of a fictitious inertia force $(F = ma)$



inertia force percent volume

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = a_x p \quad x - \text{direction}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad y - \text{direction} \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \rho g \quad z - \text{direction}$$

integrating

$$p = -\rho a_x x + f_1(y, z)$$

$$p = f_2(x, z)$$

$$p = -\rho g z + f_3(x, y)$$

Given

$$f_1(y, z) = -\rho g z + c$$

$$f_3(x, y) = -\rho a_x x + c$$

$$\therefore p = -\rho a_x x - \rho g z + c$$

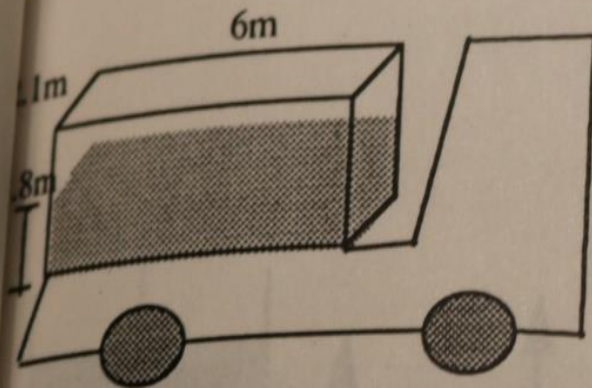
เงื่อนไข BC at $X = 0$, $p = p_a$

$$p - p_a = -\rho a_x x - \rho g z$$

การหา Shape of surface of the liquid $p = p_a$

$$z = -\frac{a_x}{g} x$$

Ex จงหาแรงดันที่กระทำต่อผนังหน้าและด้านหลังของถังน้ำ



$$a_x = 2.45 \text{ m/s}^2 \quad \tan \theta = \frac{a_x}{g}$$

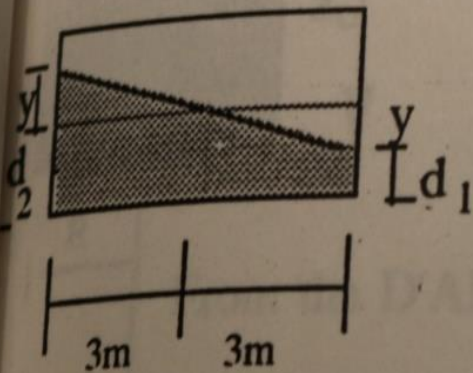
$$= \frac{2.45}{9.81} = 0.25$$

$$\theta = 14^\circ 2'$$

$$\text{ระยะ } y = 3 \tan 14^\circ 2' = 0.75 \text{ m}$$

$$d_1 = 0.9 - y = 0.9 - 0.75 = 0.15 \text{ m}$$

$$d_2 = 0.9 + y = 0.9 + 0.75 = 1.65 \text{ m}$$



แรงดันน้ำด้านหน้าถึง

$$= \frac{2.45}{9.81} = 0.25$$

$$9.81$$

$$\theta = 14^\circ 2'$$

$$\text{ระยะ } y = 3 \tan 14^\circ 2' = 0.75 \text{ m}$$

$$d_1 = 0.9 - y = 0.9 - 0.75 = 0.15 \text{ m}$$

$$d_2 = 0.9 + y = 0.9 + 0.75 = 1.65 \text{ m}$$

แรงดันน้ำด้านหน้าถึง

$$F_1 = \bar{\gamma} d_1 A_1 = 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0.15 \text{ m} \times 0.15 \times 2.1 \text{ m}^2$$

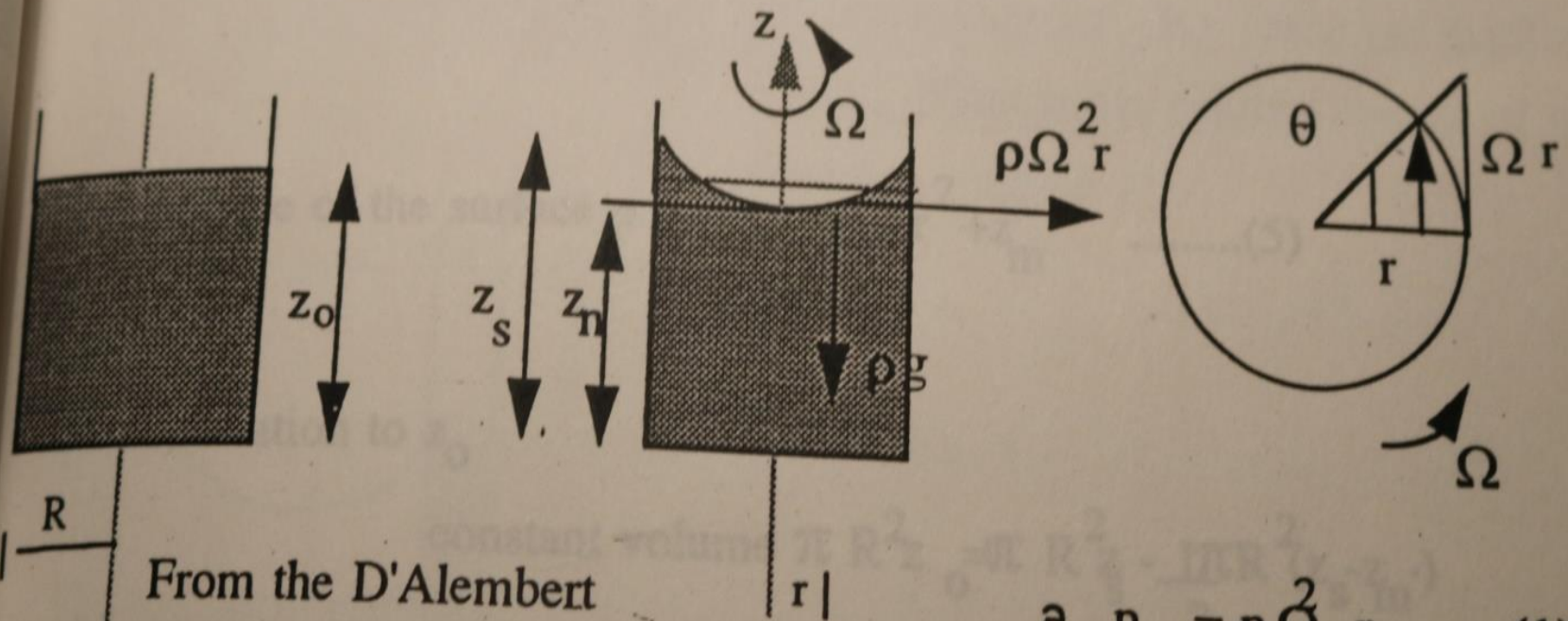
$$= 2.30 \text{ kN}$$

แรงดันน้ำด้านหลังถึง

$$F_2 = \bar{\gamma} d_2 A_2 = 9.81 \times 1.65 \times 1.65 \times 2.1$$

$$= 28 \text{ kN}$$

2) Uniform Rotation

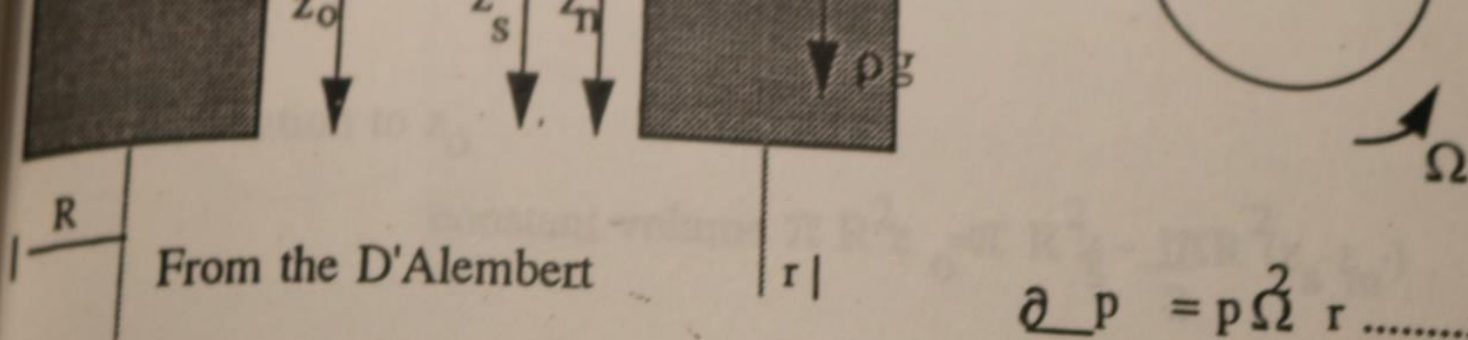


From the D'Alembert

$\Omega = \text{rad/sec}$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(2)$$



$$\Omega = \text{rad/sec}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \dots\dots\dots(3)$$

By Integrating

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + f_1(\theta, z)$$

$$p = f_2(r, z)$$

$$p = -\rho g z + f_3(r, \theta)$$

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + c$$

At equilibrium $r = 0$, $z = z_m$, $p = p_a$, $c = \rho g z_m + p_a$

$$p - p_a = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g(z - z_m) \quad \dots\dots\dots(4)$$

i.) Shape of the surface $p = p_a$; $z = \Omega^2 r^2 + z_m \quad \dots\dots\dots(5)$

ii.) Relation to z_o

$$\text{constant volume } \pi R^2 z_o = \pi R^2 z_s - \frac{1}{2} \pi R^2 (z_s - z_m)$$

$$z_o = \frac{1}{2} (z_s + z_m)$$

from Eq. 5

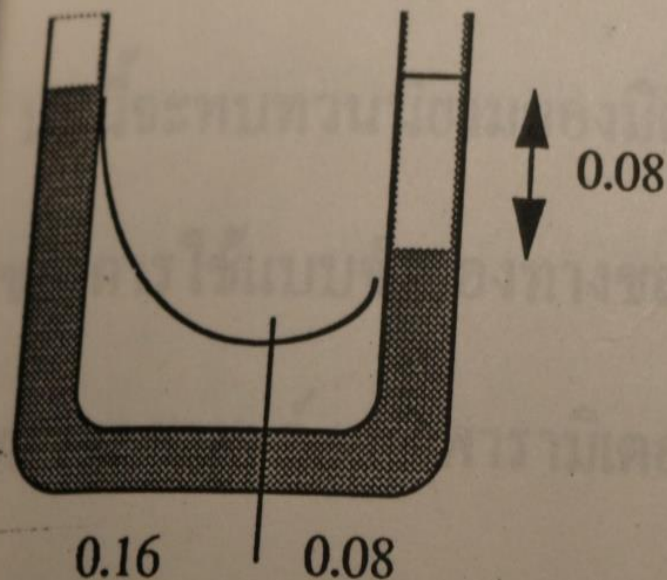
$$z_s = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} + z_m$$

$$z_m = \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + z_o$$

mercury U tube

Calculate the speed when the difference of level between the tube is 0.08 cm

What is the original height of the mercury volume ?



from Eq. 5

$$z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + z_m$$

$$z_s = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} + z_m$$

$$z_s - z = \frac{\Omega^2}{2g} (R^2 - r^2)$$

$$0.16 \quad 0.08$$

$$z_s - z = \frac{\Omega^2}{2g} (R^2 - r^2)$$

แทนค่า $z_s - z = 0.08 \text{ m}$, $R = 0.16 \text{ m}$, $r = 0.08 \text{ m}$ จะได้

$$\Omega = 15.66 \text{ rad/sec}$$

$$= \frac{15.66 \times 60}{2\pi} = 149.5 \text{ rpm}$$

The original height of the mercury

$$z_o = (z_s + z_m) = \frac{1}{4} \frac{\Omega^2 R^2}{g}$$

$$= \frac{5.66^2 \times (0.16)^2}{4 \times 9.81}$$

$$= 0.16 \text{ m}$$

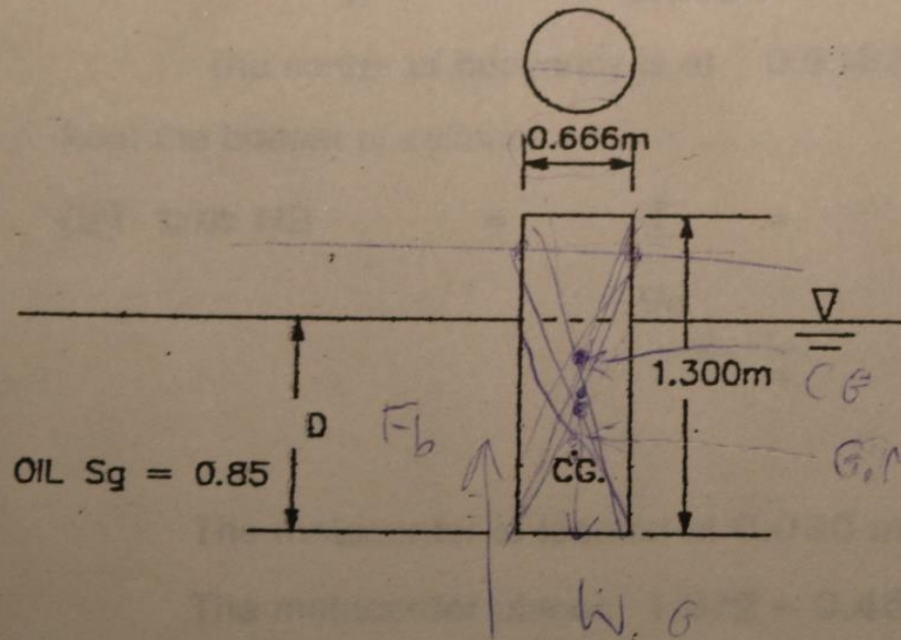
$$= 16 \text{ cm}$$

quiz

Assignment L 6

1. Would the wooden cylinder (s.g = 0.6) in the figure be stable if placed vertically in oil is shown in the figure.

(s.g oil = 0.85)

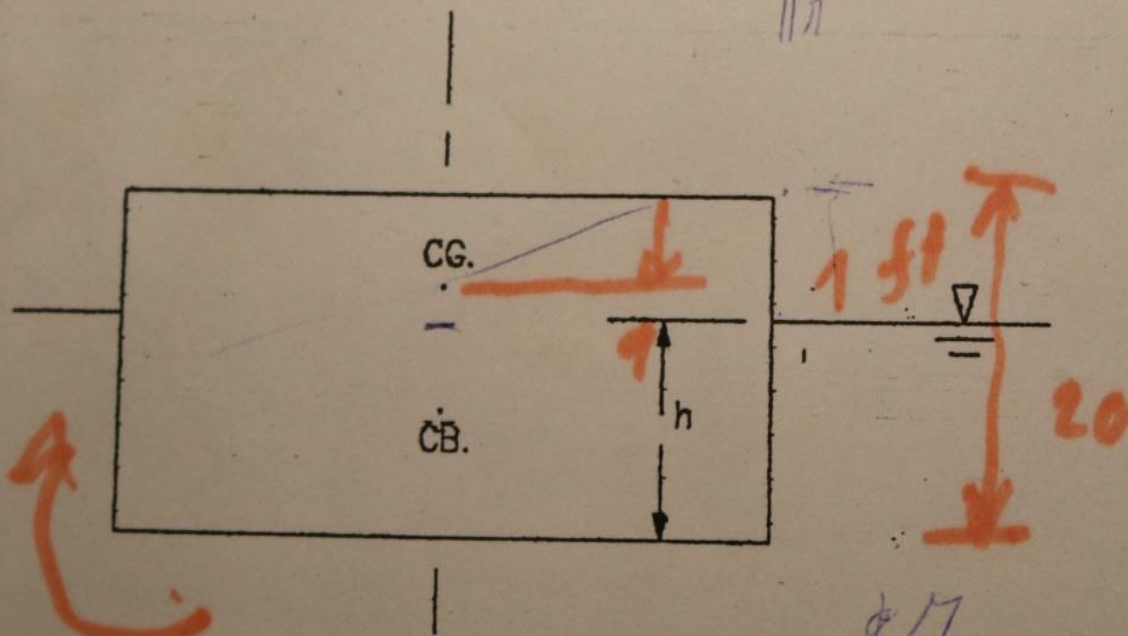


Handwritten notes and equations:

- $V = \pi r^2 h$
- $\frac{m_{oil}}{V} S_g$
- $\frac{W}{V} S_g$

2. In the figure, a scow 20 ft wide and 60 ft long has a gross weight of 200,500 lb.

2. In the figure, a scow 20 ft. wide and 60 ft. long has a gross weight of 22.5 tons. Its center of gravity is 1.0 ft. above the water surface. Find the metacentric height and restoring couple when $\Delta y = 1.0$ ft.



$$F_b = W \left(\frac{\pi d^2 h}{4} \right) \times \rho g$$

$$\frac{I}{V}$$

Solution Lesson 6

1.

(1) First determine the submerged depth of the cylinder

$$F_b = W$$

$$0.85 \times 9.81 \times (\pi/4) \times (0.666^2) H = 0.60 \times 9.81 \times (\pi/4) \times (0.666^2)$$

$$H = 0.9333 \text{ m.} = 0.917 \text{ m.}$$

The center of buoyancy is at $0.9333/2 = 0.4666 \text{ m.} = 0.4586 \text{ m.}$
from the bottom of cylinder

$$(2) \text{ MB} = \frac{I}{Vd} = \frac{(\pi/64) \times 0.666^4}{0.9333(\pi/4) \times 0.666^2}$$

$$= 0.03 \text{ m.}$$

The metacenter is located at 0.030 m. above the C.B

The metacenter places $1.3/2 - 0.466 - 0.030 = 0.154 \text{ m.}$ below C.G

Therefore the cylinder is not stable.

Solution Lesson 6 (cont.)

2. Find h

$$F_b = W$$

$$62.4 \times 60 \times 20 \times h = 225 \times 2000$$

$$h = 6.01 \text{ ft}$$

Find the CB in tipped position

$$6.01 \times 20 \times X = (6.01 - 1.0) \times 20 \times 10 + (1.0 + 1.0) \times 20/2 \times 20/3$$

$$X = 9.45 \text{ ft}$$

$$6.01 \times 20 \times Y = (6.01 - 1.0) \times 20 \times (6.01 - 1.0)/2 + (1.0 + 1.0) \times 20/2 \times (6.01 - 1.0 + (1.0 + 1.0)/2)$$

$$Y = 3.03 \text{ ft}$$

By Similar Triangular

$$\frac{AY}{b/2} = \frac{CB \ P}{MP}$$

$$1.0 = 10 - 9.45$$

$$Y = 3.03 \text{ ft}$$

By Similar Triangular

$$\frac{AY}{b/2} = \frac{CB}{MP}$$

$$\frac{1.0}{20/2} = \frac{10 - 9.45}{MP}$$

$$MP = 5.50 \text{ ft}$$

CG is $6.01 + 1.0$ or 7.01 ft from the bottom

$$\text{Hence CGP} = 7.01 - 3.03 = 3.98 \text{ ft}$$

$$\begin{aligned} \text{MGP} &= MP - \text{CGP} \\ &= 5.50 - 3.98 \\ &= 1.52 \text{ ft} \end{aligned}$$

The scow is stable, since M_{CG} is positive.

$$\begin{aligned} \text{Righting moment} &= (M_{CG}) \sin \theta \\ &= 225 \times 2000 \times 1.52 \times \frac{1}{\sqrt{((20/2)^2 + 1^2)}} \\ &= 68060 \text{ ft-lb.} \end{aligned}$$